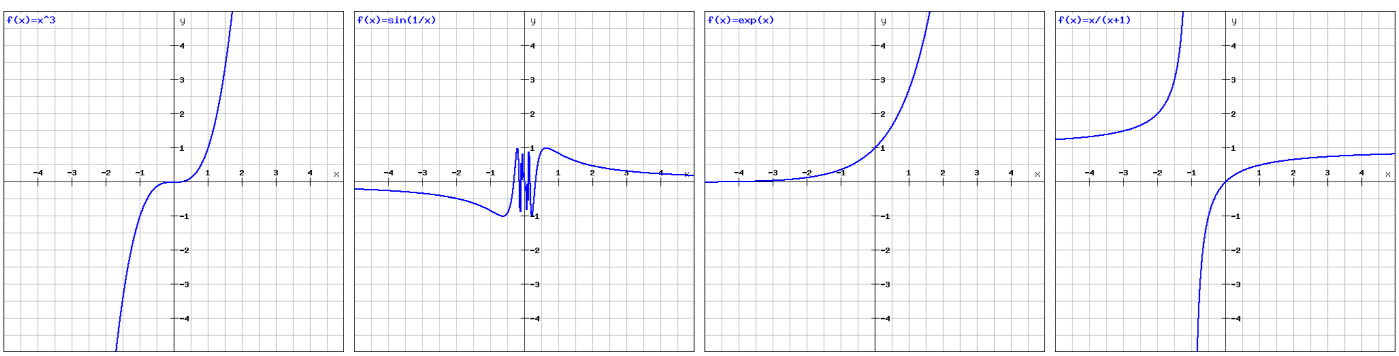
Funkcje (liczbowe)

Funkcje i ich własności

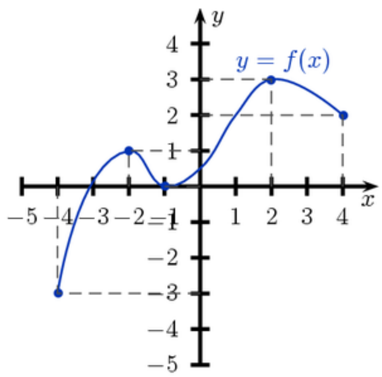
Do zdefiniowania pojęcia funkcji potrzebne będą dwa zbiory, nazwijmy je X i Y oraz pewne przyporządkowanie, które wiąże ze sobą ich elementy. Funkcją nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi danego zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y. Zbiór X, nazywany zbiorem argumentów funkcji, a zbiór Y, nazywany zbiorem wartości funkcji. W definicji tej kluczowe znaczenie ma słówko "dokładnie", wystarczy, że jakiemuś elementowi przyporządkujemy więcej niż jeden element by takie przyporządkowanie nie było funkcją. Zbiory X i Y mogą być zupełnie dowolnymi zbiorami, my będziemy jednak zajmować się tylko zbiorami liczbowymi. Funkcje na nich określone nazywamy funkcjami liczbowymi. Zdanie: f jest funkcją zbioru X w zbiór Y - zapisujemy symbolicznie: $f : X \longrightarrow Y$.
Przykład 1: Każdej liczbie całkowitej przyporządkowujemy liczbę do niej przeciwną. Funkcję tę zapisujemy: $f(x) = -x$.
Przykład 2: Każdej liczbie rzeczywistej różnej od zera przyporządkowujemy jej odwrotność. Funkcję tę zapisujemy: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Definicje związane z pojęciem funkcji liczbowej.
Dziedzina funkcji jest to zbiór wszystkich elementów zbioru X, dla których określona jest funkcja, inaczej zbiór argumentów funkcji.
Zbiór wartości funkcji jest to zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez funkcję.
Miejsce zerowe funkcji to taki argument x, dla którego $f(x) = 0$.
Wykres funkcji. Wykresem funkcji $f(x)$ na płaszczyźnie nazywamy zbiór par liczb $(x, f(x))$, gdzie x jest argumentem funkcji, a $f(x)$ jej wartością dlya tego argumentu. Graficzna postać wykresu to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych $(x, f(x))$. Osie wykresu funkcji noszą nazwy OY (oś rzędnych) i OX (oś odciętych).

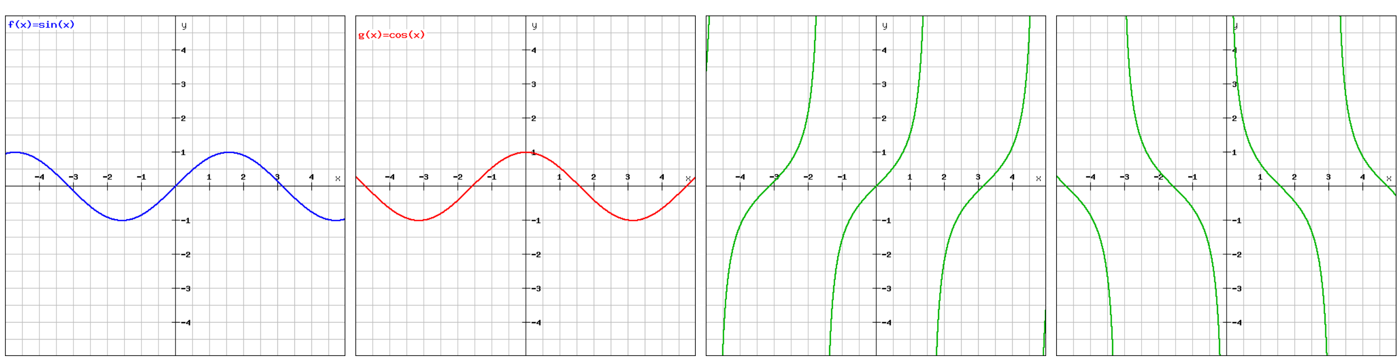


Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest monotoniczna w danym przedziale, jeśli ma w nim jedną z czterech własności:
Funkcja jest **rosnąca** jeśli większym argumentom odpowiadają większe wartości, inaczej, dla dowolnych $x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Wykres takiej funkcji „wznosi się” gdy poruszamy się „w prawo”.
Funkcja jest **malejąca** jeśli większym argumentom odpowiadają mniejsze wartości, inaczej, dla dowolnych $x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Wykres takiej funkcji „opada” gdy poruszamy się „w prawo”.
Funkcja jest nierosnąca jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Funkcja jest niemalejąca jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$
Maksimum i minimum funkcji. Spójrzmy na wykres funkcji poniżej, określoną dla $x \in < -4; 4 >$. Przyjmuje ona zarówno wartość największą i najmniejszą. Funkcja ta przyjmuje wartość największą $y_{max} = 3$ dla $x_1 = 2$. Natomiast wartością najmniejszą tej funkcji jest $y_{min} = -3$ dla $x_2 = -4$. Zwróćmy uwagę, że funkcja ta posiada dwie „górki” i jeden „dołek” położony między nimi. Takie miejsca nazywane są ekstremami funkcji. Ekstremum funkcji definiuje się jako punkt, w którym funkcja zmienia

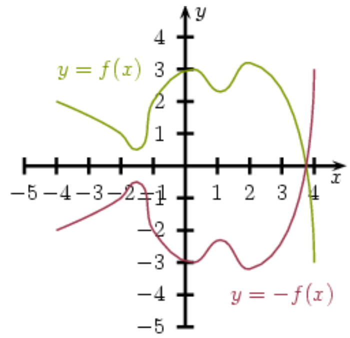
swoją monotoniczność np. z rosnącej na malejącą. „Górkę” nazywamy **maksimum** funkcji, zaś „dołek” **minimum** funkcji.



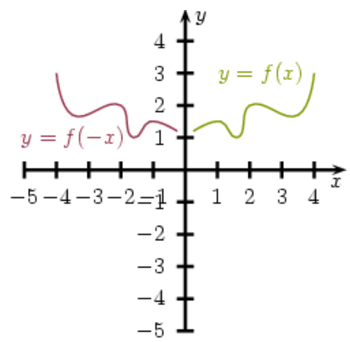
Najmniejsza i największa wartość funkcji. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość **największą** $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \leq f(x_0)$. Funkcja $y = f(x)$ przyjmuje wartość **najmniejszą** $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x_0 \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \geq f(x_0)$.
Funkcja różnowartościowa. Jest to funkcja, która każdemu argumentowi przyporządkowuje inną wartość. W skrócie: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Przykładem funkcji różnowartościowej jest funkcja tożsamościowa $y = f(x) = x$.
Funkcja parzysta. Jest to funkcja, która przeciwnym argumentom z dziedziny przyporządkowuje równe wartości. Przykładem funkcji parzystej jest funkcja $y = |x|$. Innymi przykładami są funkcje potęgowe o parzystym wykładniku, np. $f(x) = x^2,\ f(x) = x^4,\ f(x) = x^8 \ldots$
Funkcja nieparzysta. Jest to funkcja, która przeciwnym argumentom z dziedziny przyporządkowuje przeciwne wartości. Przykładem funkcji nieparzystej jest funkcja tożsamościowa $y = x$. Innymi przykładami są funkcje potęgowe o nieparzystym wykładniku, np. $f(x) = x^3,\ f(x) = x^5,\ f(x) = x^7 \ldots$
Uwaga! Jeśli funkcja nie jest parzysta nie oznacza to, że jest nieparzysta. I odwrotnie: jeśli funkcja nie jest nieparzysta nie oznacza to, że jest parzysta. Większość funkcji nie jest ani parzysta ani nieparzysta.
Funkcja okresowa. Funkcja jest okresowa jeśli jej wartości powtarzają się co pewną wartość argumentu. Najmniejszą z tych wartości nazywamy okresem podstawowym. Inaczej: gdy istnieje liczba $T \neq 0$, taka że dla każdej wartości argumentu x zachodzi równość: $f(x + T) = f(x)$. Przykładami funkcji okresowych są funkcje trygonometryczne $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$. Funkcja stała $f(x) = c$ również jest okresowa; okresem jej jest każda liczba rzeczywista. Poniżej znajdują się przykłady 4 wykresów funkcji okresowych.



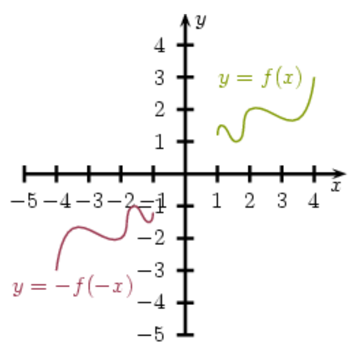
Przekształcanie wykresów funkcji
Symetria wykresu względem osi OX. Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijemy symetrycznie względem osi OX, to każda wartość funkcji po przekształceniu zmieni znak. Zatem wzór funkcji o wykresie odbitym symetrycznie względem osi OX będzie miał postać: $y = -f(x)$. A zatem by sporządzić wykres funkcji $y = -f(x)$ należy wykres funkcji $y = f(x)$ odbić symetrycznie względem osi OX.



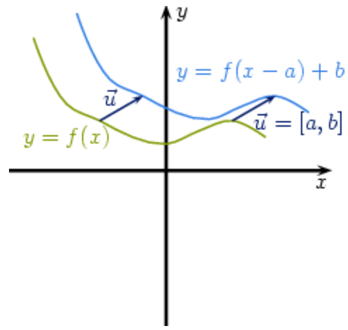
Symetria wykresu względem osi OY. Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ odbijemy symetrycznie względem osi OY, to każdy argument funkcji po przekształceniu zmieni znak. Zatem wzór funkcji o wykresie odbitym symetrycznie względem osi OX będzie miał postać: $y = f(-x)$. A zatem by narysować wykres funkcji $y = f(-x)$ należy wykres funkcji $y = f(x)$ odbić symetrycznie względem osi OY.



Symetria wykresu względem środka układu współrzędnych. Jeżeli wykres funkcji $y = f(x)$ przekształcimy przez symetrię względem początku układu współrzędnych, to każdy argument funkcji i każda wartość funkcji po przekształceniu zmieni znak. Zatem wzór funkcji o wykresie odbitym symetrycznie względem osi OX będzie miał postać: $y = -f(-x)$. A zatem by narysować wykres funkcji $y = -f(-x)$ należy wykres funkcji $y = f(x)$ odbić symetrycznie środka układu współrzędnych.



Przesunięcie wykresu. Aby narysować wykres funkcji $y = f(x - a)$ należy wykres funkcji $y = f(x)$ przesunąć o a w prawo dla $a > 0$ i o a w lewo dla $a < 0$. Aby narysować wykres funkcji $y = f(x) + b$ należy wykres funkcji $y = f(x)$ przesunąć o b w górę dla $b > 0$ i o b w dół dla $b < 0$. Czytelnik sam wywnioskuje jak z wykresu funkcji $f(x)$ przejść do wykresu $f(x - a) + b$.



y
$y = f(x-a)+b$
$\vec{u}$
$\vec{u} = [a, b]$
$y = f(x)$
x