PLANIMETRIA CZYLI GEOMETRIA PŁASZCZYZNY CZ. 1

PODSTAWOWE POJĘCIA – PUNKT, PROSTA, PŁASZCZYZNA, AKSJOMAT

Planimetria to dział geometrii, w którym przedmiotem badań są własności figur geometrycznych leżących na płaszczyźnie (patrz określenie płaszczyzny).

W geometrii istnieją pojęcia, które traktujemy jak oczywiste, są to tak zwane **pojęcia pierwotne.** Należy do nich **punkt, prosta, płaszczyzna**. Punkty oznaczamy wielkimi literami np. $A, B, C, \ldots$ lub, w przypadku gdy zachodzi konieczność oznaczenia większej ich liczby, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Proste oznaczamy małymi literami np. $k, l, m, \ldots$ lub $k_1, k_2, k_3, \ldots$

O punktach, prostych, płaszczyznach można sformułować wiele oczywistych prawd, których nie dowodzimy. Nazywamy je **aksjomatami**. Aksjomatem jest na przykład stwierdzenie: „*Przez 2 różne punkty przechodzi dokładnie 1 prosta*" lub „*Przez każdy punkt przechodzi nieskończenie wiele prostych*".

PROSTE RÓWNOLEGŁE, PROSTOPADŁE, PĘK PROSTYCH

Jeśli proste na płaszczyźnie nie mają punktów wspólnych, to nazywamy je **równoległymi**. Dwie różne proste nazywamy **prostopadłymi**, jeżeli jedna z nich jest osią symetrii drugiej. Mając dowolny punkt na płaszczyźnie, możemy przez niego poprowadzić nieskończoną liczbę prostych; zbiór wszystkich prostych przechodzących przez dany punkt to **pęk prostych**. Punkt ten to wierzchołek pęku.

FIGURA PŁASKA, WYPUKŁA, OGRANICZONA, NIEOGRANICZONA

Płaszczyzna jest zbiorem punktów. **Figura płaska** to dowolny podzbiór punktów płaszczyzny. Figurą płaską jest zatem na przykład pojedynczy punkt, prosta, w końcu cała płaszczyzna. Znamy już trójkąty, kwadraty, trapezy, koła, elipsy ale tylko mała część pośród możliwych figur płaskich.

Figury wypukłe, ograniczone, nieograniczone. Figurę nazywamy **wypukłą**, jeśli zawiera się w niej każdy odcinek, którego końce należą do figury. Na przykład jest nią trójkąt, równoległobok, koło.

Figurę płaską nazywamy **ograniczoną**, jeżeli zawiera się w pewnym kole (np. trójkąt, kwadrat). Figurę płaską, która nie zawiera się w żadnym kole nazywamy **nieograniczoną** (np. prosta, kąt).

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH NA PŁASZCZYŹNIE, PROSTE RÓWNOLEGŁE, PROSTOPADŁE, KIERUNEK

Na płaszczyźnie proste albo są równoległe albo mają 1 punkt wspólny (przecinają się). **Kierunkem** prostej nazywamy zbiór wszystkich prostych równoległych do danej prostej. Proste są prostopadłe do siebie jeśli wszystkie kąty wierzchołkowe w punkcie przecięcia są równe.

ODCINEK, ŁAMANA, PÓŁPROSTA, KĄT, WIELOKĄT

Odcinkiem $\overline{AB}$ nazywamy figurę utworzoną z dwóch różnych punktów A i B (zwanych jego końcami) oraz wszystkich punktów leżących między nimi na prostej wyznaczonej przez te punkty. Z odcinkiem wiąże się pojęcie symetralnej (odcinka). Symetralna to zbiór punktów płaszczyzny równo odległych od końców odcinka. Symetralna to prosta prostopadła do odcinka i przechodząca przez jego środek

Łamana. Łamana to figura geometryczna składającą się ze skończonej liczby odcinków, takich że żadne dwa kolejne odcinki nie leżą na jednej prostej. Koniec poprzedniego odcinka jest początkiem następnego. Jeśli początek pierwszego odcinka pokrywa się z końcem ostatniego, to łamaną nazywamy zamkniętą; w przeciwnym razie mówimy, że łamana jest otwarta.

Półprosta. Jeśli na prostej obierzemy dowolny punkt A, to punkt ten podzieli tą prostą na dwie części. Każdą z tych części nazywać będziemy półprostą. Punkt A nazywamy początkiem półprostej.

Kąt. Kąt to każda z dwóch części płaszczyzny ograniczonych dwiema półprostymi o wspólnym początku (wierzchołek kąta) wraz z tymi półprostymi (ramiona kąta). Kąty oznaczamy literami alfabetu greckiego: $\alpha, \beta\ \gamma$. Dwusieczną kąta nazywamy półprostą, która dzieli go na dwa przystające kąty. Dwusieczną leży na osi symetrii kąta, a każdy punkt dwusiecznej jest równo odległy od obu ramion. **Kąt pełny** to płaszczyzna z wyróżnioną półprostą, **kąt zerowy** to wyróżniona półprosta na płaszczyźnie.

Wielokąt i przekątna. To obszar płaszczyzny ograniczony łamaną zamkniętą. Wielokąt o n bokach (i co za tym idzie kątach) nazywamy n-kątem. Wielokąt o najmniejszej liczbie boków to oczywiście trójkąt. Przekątną wielokąta nazywamy odcinek, który łączy dwa niesąsiednie wierzchołki wielokąta.

Kąty wewnętrzne i zewnętrzne wielokąta. Kąty utworzone przez dowolne dwa kolejne boki nazywamy kątami wewnętrznymi. Kąt zewnętrzny wielokąta to kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego wielokąta. Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta wynosi $(n-2)\cdot 180^{O}$ Suma miar kątów zewnętrznych każdego wielokąta wypukłego jest równa 360^{O}.

OKRĄG, ŁUK, KOŁO, CIĘCIWA, ŚREDNICA, SIECZNA, STYCZNA

Okręgiem nazywamy zbiór punktów równo odległych od danego punktu, zwanego środkiem okręgu. Promieniem okręgu nazywamy odcinek łączący dowolny punkt okręgu z jego środkiem (a także odległość dowolnego punktu okręgu od jego środka). Cięciwa okręgu to odcinek łączący dwa dowolne punkty okręgu.

Koło to część płaszczyzny ograniczona okręgiem, wraz z tym okręgiem.

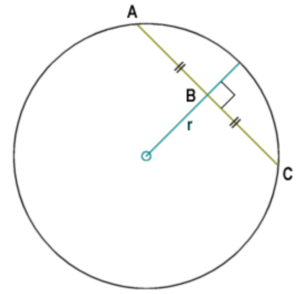
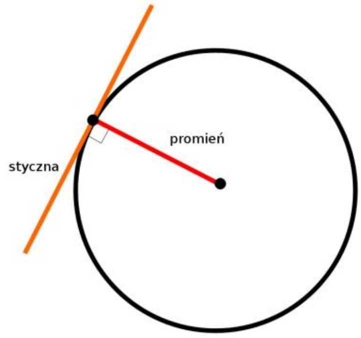
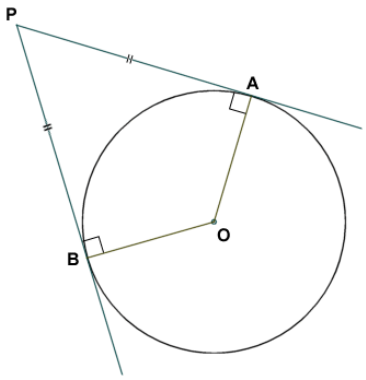
Łuk okręgu to jedna z dwóch części okręgu wyznaczona przez dwa punkty tego okręgu.

Cięciwa okręgu (koła) to odcinek łączący dwa różne punkty okręgu.

Średnica okręgu (koła) – to najdłuższa z jego cięciw, przechodząca przez środek okręgu (koła).

Sieczna to prosta mająca z okręgiem dokładnie dwa punkty wspólne, prostą mająca dokładnie jeden punkt wspólny nazywamy styczną do okręgu.

TWIERDZENIA DLA OKRĘGU I KOŁA

Twierdzenie 1: Promień prostopadły do cięciwy dzieli ją na dwie równe części.	
Twierdzenie 2: Prosta jest styczna do okręgu wtedy i tylko wtedy gdy ma z okręgiem jeden punkt wspólny i jest prostopadła do promienia. Odległość stycznej od środka okręgu jest równa długości promienia.	
Twierdzenie 3: Odcinki dwóch stycznych do okręgu z punktu leżącego na zewnątrz okręgu są równe.	

KĄT ŚRODKOWY I KĄT WPISANY (W OKRĄG)

Kąt wpisany to taki kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy tego okręgu.

Kąt środkowy to kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramiona są półprostymi zawierającymi promienie koła.

Twierdzenie: Kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

Wniosek – wszystkie kąty wpisane oparte na równym łuku okręgu są równe.

WYCINEK I ODCINEK KOŁA

Wycinek koła to jedna z dwóch części, na jakie dzielą koło dwa promienie.

Odcinek koła to jedna z dwóch części na jakie koło dzieli cięciwa.

WIELOKĄT WPISANY I OPISANY NA OKRĘGU

Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki należą do okręgu, nazywamy wielokątem wpisanym w okrąg (okrąg ten nazywamy okręgiem opisanym na tym wielokącie).

Twierdzenie: Na wielokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich boków wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu.

Wielokąt, którego wszystkie boki są styczne do pewnego okręgu, nazywamy wielokątem opisanym na okręgu (okrąg ten nazywamy okręgiem wpisanym w wielokąt).

Twierdzenie: W wielokąt (wypukły) można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu.

PODSTAWOWE WIELKOŚCI W TRÓJKĄTACH

Wysokość trójkąta to najkrótszy odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem (lub jego przedłużeniem). Jest on zawsze prostopadły do tego boku. Każdy trójkąt ma trzy wysokości, a ich przecięcie nazywa się ortocentrum trójkąta.

Środkowe to odcinki łączące wierzchołki ze środkami boków. Środkowe przecinają się w punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości trójkąta.

Twierdzenie: Środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 1:2.

Symetralne boków trójkąta to po prostu symetralne odcinków będących bokami.

Twierdzenie: Symetralne przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie.

Dwusiecznymi kątów trójkąta będziemy nazywać odcinki zawarte w dwusiecznych kątów, od wierzchołka do punktu przecięcia z przeciwległym bokiem.

Twierdzenie: Dwusieczne kątów przecinają się w punkcie, który jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

KLASYFIKACJA TRÓJKĄTÓW ZE WZGLĘDU NA BOKI:

- **trójkąt dowolny**: każdy bok ma inną długość
- **trójkąt równoramienny:** 2 boki są równe
- **trójkąt równoboczny**: wszystkie boki równe

KLASYFIKACJA TRÓJKĄTÓW ZE WZGLĘDU NA KĄTY:

- **trójkąt ostrokątny**: wszystkie kąty są ostre
- **trójkąt rozwartokątny**: jeden z kątów jest rozwarty
- **trójkąt prostokątny**: jeden z kątów jest prosty.

PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW

I cecha podobieństwa trójkątów

Boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta.

II cecha podobieństwa trójkątów

Kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim dwóm kątów drugiego trójkąta.

III cecha podobieństwa trójkątów

Dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między nimi zawarte są równe.

PRZYSTAWANIE TRÓJKĄTÓW

I cecha przystawania trójkątów

Trzy boki jednego trójkąta są odpowiednio równe trzem bokom drugiego trójkąta.

II cecha przystawania trójkątów

Dwa boki i kąt między nimi zawarty jednego trójkąta są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między nimi zawartemu drugiego trójkąta.

III cecha przystawania trójkątów

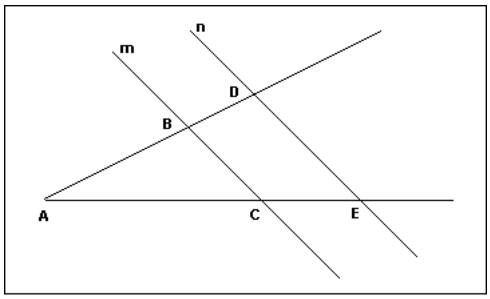
Długość boku i dwa kąty do niego przyległe jednego trójkąta są odpowiednio równe długości boku i dwóm kątom do niego przyległym drugiego trójkąta.

PODSTAWOWE TWIERDZENIA GEOMETRII PŁASKIEJ

Twierdzenie Talesa. Jeżeli ramiona kąta przetniemy prostymi równoległymi (na rysunku są tylko dwie proste m i n, ale twierdzenie zachodzi dla dowolnej ich liczby), to długości odcinków wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta. Zachodzi również twierdzenie odwrotne (jeżeli odpowiednie odcinki są proporcjonalne, to proste m i n są równoległe).

Mamy zatem: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|}$; również $\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}$.

Proporcje te wynikają z podobieństw trójkątów $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ i równości stosunków odpowiednich boków.



Twierdzenie Pitagorasa. W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej. Zapisując w skrócie:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dowód. Zauważmy, że $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta BDC$.

$$\begin{cases} \frac{c_2}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow\ a^2 = c \cdot c_2 \\ \frac{c_1}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = c \cdot c_1 \end{cases}$$

Dodając równania stronami otrzymujemy:

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_1 + c \cdot c_2 = c(c_1 + c_2) = c \cdot c = c^2$$