Trygonometria

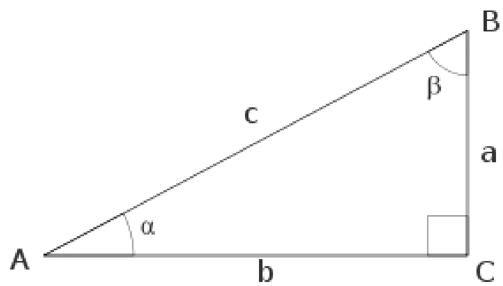
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Określamy cztery podstawowe funkcje trygonometryczne kąta α w trójkącie prostokątnym. Są to sinus, kosinus, tangens i kotangens. W skrócie zapisujemy je odpowiednio:

$$sin\alpha,\ cos\alpha,\ tg\alpha,\ ctg\alpha$$

Funkcje trygonometryczne dla kątów ostrych definiujemy jako stosunki długości odpowiednich dwóch boków trójkąta prostokątnego.

$$sin\alpha = \frac{a}{c},\ cos\alpha = \frac{b}{c},\ tg\alpha = \frac{a}{b},\ ctg\alpha = \frac{b}{a}$$



Ponieważ trójkąt jest prostokątny, zachodzi zależność pomiędzy kątami α i β: $\alpha = 90^{\circ} - \beta$. Zatem oczywiście spełnione są następujące równości:

$$sin\alpha = cos(90^0 - \alpha),\ cos\alpha = sin(90^0 - \alpha),\ tg\alpha = ctg(90^0 - \alpha),\ ctg\alpha = tg(90^0 - \alpha)$$

Wartości funkcji trygonometryczne dla kilku istotnych kątów:

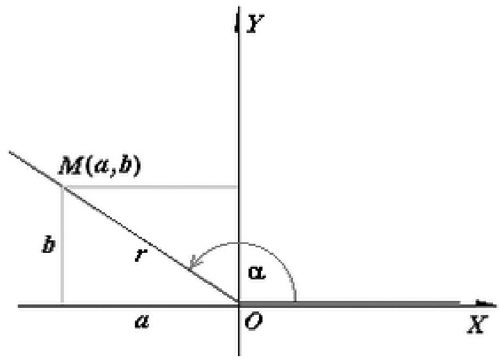
α	30^0	45^0	60^0
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

W trójkącie prostokątnym kąt α zawiera się w przedziale $(0;90^0)$. Jednak funkcje trygonometryczne można również zdefiniować dla kątów dla kątów o dowolnej mierze. W tym celu musimy wprowadzić definicję kąta skierowanego.

Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego

Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych. Wspólny początek nazywamy wierzchołkiem kąta skierowanego, pierwszą półprostą nazywamy ramieniem początkowym, drugą ramieniem końcowym kąta. Dotychczas za jednostkę miary kąta przyjmowaliśmy stopień (1^0), czyli $\frac{1}{90}$ kąta prostego. Dla zdefiniowanego poniżej kąta skierowanego będziemy posługiwać się inną jednostką miary. Otóż będzie to długość łuku okręgu o promieniu jednostkowym $(r = 1)$, którą wyznacza dany kąt. I tak odpowiednio kąt pełny (360^0) wyznacza łuk o długości 2π, kąt półpełny (180^0), wyznacza łuk o długości π, kąt prosty (90^0), wyznacza łuk o długości $\frac{\pi}{2}$, itd. Obierzmy na płaszczyźnie prostokątny układ współrzędnych OXY. Niech α oznacza dowolny kąt skierowany, którego ramię początkowe pokrywa się z osią OX, wierzchołek kąta z punktem $(0,0)$, ramię końcowe znajduje się w położeniu dowolnym. Miara kąta skierowanego może być dowolna, gdyż ramię końcowe możemy obrócić wokół punktu $(0,0)$, dowolną ilość razy. Umawiamy się, że obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wyznacza kąt dodatni zaś w kierunku przeciwnym, kąt ujemny. Oczywiście co kąt o wartości 2π ramię końcowe będzie wracać do pierwotnego położenia, co wskazuje że funkcje trygonometryczne powtarzają swoje wartości właśnie co 2π, a niektóre nawet częściej. Na końcowym ramieniu obierzmy punkt $M(a,b)$. Funkcje trygonometryczne kąta skierowanego α określa się wzorami:

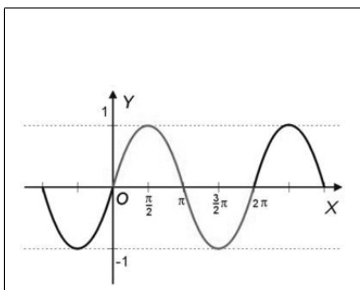
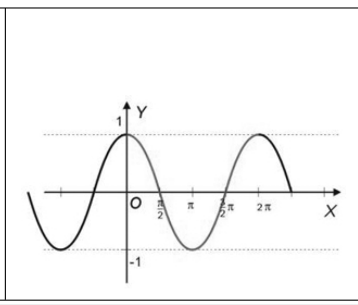
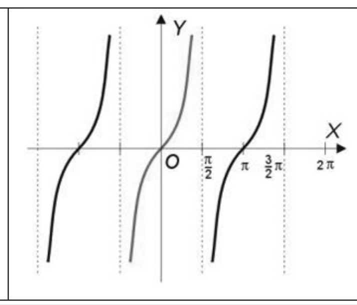
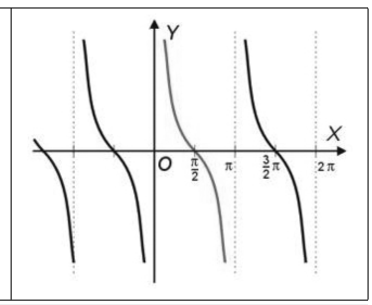
$$sin\alpha = \frac{b}{r},\ cos\alpha = \frac{a}{r},\ tg\alpha = \frac{b}{a},\ ctg\alpha = \frac{a}{b}$$



Ponieważ miara łukowa kąta to po prostu liczba rzeczywista, zamiast α będziemy oznaczać ją x. Patrząc na układ współrzędnych i znaki funkcji trygonometrycznych w odpowiednich ćwiartkach układu, łatwo wyprowadzamy następujące zależności:

$$sinx = sin(\pi - x),\ sin(\pi + x) = -sinx,\ cos(\pi - x) = -cosx,\ cos(\pi + x) = -cosx$$

Wykresy funkcji trygonometrycznych

$y = sinx$	$y = cosx$	$y = tgx$	$y = ctgx$

Jak widać z wykresów funkcje trygonometryczne są okresowe. W przypadku sinusa i cosinusa okres wynosi 2π. Tangens i kotangens powtarzają się częściej, bo co π. Wykres funkcji kosinus jest po prostu przesuniętym o wartość $\frac{\pi}{2}$ w lewo wykresem funkcji sinus. Ponadto, sinus i kosinus są określone dla wszystkich x (także ujemnych: wartości ujemne odpowiadają obrotowi półprostej w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara). Sinus i kosinus przyjmują wartości z przedziału $< -1; 1 >$. Dwa wykresy z prawej również są do siebie podobne. Oba to gałęzie rozmieszczone w "pasach" o szerokości π. Wykres kotangensa powstaje z wykresu tangensa poprzez odbicie symetryczne względem osi OY i przesunięcie w prawo o wartość $\frac{\pi}{2}$. Obydwie funkcje w regularnych odstępach są nieokreślone, tangens we wszystkich wielokrotnościach π, kotangens w nieparzystych wielokrotnościach $\frac{\pi}{2}$. I wreszcie tangens i kotangens mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste.

Tożsamości trygonometryczne

Tożsamość to równość zawsze prawdziwa. Najważniejszą z tożsamości trygonometrycznych jest tzw. jedynka trygonometryczna czyli równość postaci:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

Dowód? Spróbujmy zastosować twierdzenie Pitagorasa.
Inne tożsamości to:

$$tgx = \frac{sinx}{cosx}$$

$$sin2x = 2sinxcosx$$

$$cos2x = cos^2x - sin^2x$$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2x}$$

Prawdziwość tożsamości trygonometrycznej dowodzimy przekształcając jedną ze stron, tak by uzyskać drugą. Udowodnimy kilka przykładowych tożsamości:

$$\frac{1}{sin^2x} - 1 = ctg^2x$$

Przekształcamy lewą stronę równości:

$$L = \frac{1}{sin^2x} - 1 = \frac{1 - sin^2x}{sin^2x} = \frac{cos^2x}{sin^2x} = ctg^2x = P\blacksquare$$

Sprawdźmy kolejną tożsamość:

$$cos^4x + sin^4x = 1 - 2sin^2xcos^2x$$

Przekształcamy lewą stronę równości:

$$L = cos^4x + sin^4x = (cos^2x + sin^2x)^2 - 2sin^2xcos^2x = 1 - 2sin^2xcos^2x = P\blacksquare$$

I jeszcze jedną:

$$cos^2x - sin^2x = \frac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x}$$

Tym razem przekształcamy prawą stronę równości.

$$P = \frac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x} = \frac{1 - \frac{sin^2x}{cos^2x}}{1 + \frac{sin^2x}{cos^2x}} = \frac{\frac{cos^2x - sin^2x}{cos^2x}}{\frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}} = \frac{cos^2x - sin^2x}{cos^2x + sin^2x} = cos^2x - sin^2x = L\blacksquare$$

Wzory redukcyjne

Są to wzory pozwalające sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta skierowanego większego od $\frac{\pi}{2}$ do obliczenia wartości funkcji dla kąta ostrego.

$\alpha =$	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	$2\pi + x$	$-x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$sin\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$
$cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$
$tg\alpha$	-$tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$

Na przykład:

$$sin\frac{11}{6}\pi = sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = -sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$cos\frac{5}{6}\pi = sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = -cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\frac{7}{4}\pi = tg(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -tg\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$