Wyrażenia algebraiczne

Potęga o wykładniku naturalnym

Potęga liczby (o wykładniku naturalnym) to po prostu pomnożenie przez siebie danej liczby tyle razy ile wynosi wykładnik. Zapisujemy to następująco:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n}$$

Potęgę o wykładniku zerowym definiujemy następująco. Jeżeli $a \neq 0$ to $a^0 = 1$.

Pierwiastek z liczby

Jeżeli a >0 i $n > 1$ to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką liczbę b, że zachodzi: $b^n = a$. Pierwiastek stopnia n z liczby a oznaczamy $\sqrt[n]{a}$. Jeżeli $n = 2$ to w zapisie pomijamy n i piszemy $\sqrt{a}$.
Na przykład: $\sqrt{9} = 3$, bo $3^2 = 9$, $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$, $\sqrt[4]{\frac{625}{1296}} = \frac{5}{6}$, bo $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.
Jeżeli $a < 0$ i $n > 1$ i n jest liczbą nieparzystą, to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką ujemną liczbę b, że zachodzi: $b^n = a$.
Nietrudno zauważyć, że nie z każdej liczby da się łatwo wyciągnąć pierwiastek. Już liczba 2 sprawia kłopoty. Podobnie 3, 5 i wiele innych. Jednak takie pierwiastki istnieją i są liczbami niewymiernymi.

Potęga o wykładniku wymiernym

Jeżeli $a > 0, m, n$ są liczbami całkowitymi, to $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
Na przykład: $16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$
W przypadku potęg o wykładniku całkowitym ujemnym i wymiernym obowiązują prawa działań identyczne jak w przypadku potęg o wykładniku naturalnym.
Nietrudno zauważyć, ż w przypadku m=1 mamy do czynienia z następującą sytuacją: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
Mając na uwadze powyższą równość, przy łatwo wyprowadzić następujące zależności:

Prawa działań na pierwiastkach

Jeżeli $a, b \geqslant 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi takimi, że $m, n \neq 0$ i $m, n \neq 1$ to:

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b},\ \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0,\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a},\ \sqrt[n]{a^n} = a$$

Wyrażenie algebraiczne

Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie zbudowane z liczb, liter, nawiasów oraz znaków działań, na przykład:

$$2xy,\ a + 7,\ 7(x - 1)\ , a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Symbole literowe występujące w wyrażeniu algebraicznym nazywamy zmiennymi.
Wartością liczbową wyrażenia algebraicznego dla danych wartości zmiennych nazywamy liczbę, którą otrzymamy po podstawieniu tych wartości w miejsce zmiennych. Wyrażenia algebraiczne służą do symbolicznego zapisywania różnych wielkości. Na przykład pole prostokąta o bokach a i b zapisujemy za pomocą wyrażenia ab, a objętość walca o promieniu r i wysokości h za pomocą wyrażenia $\pi r^2 h$.
Jednomian to iloczyn liczby i zmiennych, na przykład:

$$3a,\ \pi r^2 h,\ x^2yz^3$$

Jednomiany podobne (wyrazy podobne), to jednomiany, w których występują te same zmienne w tej samej potędze – jednomiany podobne mogą różnić się jedynie współczynnikiem liczbowym. Jednomiany podobne można dodawać i odejmować (redukować wyrazy podobne). Zapisywanie jednomianów

w najprostszej postaci nazywamy porządkowaniem. Sumę dwóch lub większej liczby jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**.
Na przykład sumy algebraiczne to:

$$a^2 + b^2,\ xy^2 - x^2y^2 + x^2y,\ x^3 + y^3 + z^3$$

Iloczyn dwóch lub większej liczby sum algebraicznych nazywamy **iloczynem algebraicznym**.
Na przykład iloczyny algebraiczne to:

$$(a + b)(a - b),\ xy(x + y),\ (a - b)(b - c)(a - c)$$

Działania na wyrażeniach algebraicznych. Reguły opuszczania nawiasów. Jeżeli w sumie algebraicznej występują nawiasy, to nawiasy poprzedzone znakiem plus (lub gdy nie ma przed nimi żadnych znaków), można usunąć bez zmiany znaków przed wyrazami w nawiasach, na przykład:

$$2x + (3x - 4y) = 2x + 3x - 4y,\ (-2a) + (4a - 6b) = -2a + 4a - 6b$$

Nawiasy poprzedzone znakiem minus, można usunąć, zmieniając jednocześnie znak każdego wyrazu występującego w nawiasie na przeciwny, na przykład:

$$2x - (3x - 4y) = 2x - 3x + 4y,\ (-2a) - (4a - 6b) = -2a - 4a + 6b$$

Dodawanie sum algebraicznych. Aby wykonać dodawanie, należy najpierw opuścić nawiasy, a następnie zredukować wyrazy podobne, na przykład:

$$3x + (2x - 6y) = 3x + 2x - 6y = 5x - 6y,\ (4a + 3b) + (-8a - 6b) = 4a - 8a + 3b - 6b = -4a - 3b$$

Odejmowanie sum algebraicznych. Aby wykonać odejmowanie, należy najpierw opuścić nawiasy, a następnie zredukować wyrazy podobne, na przykład:

$$-6x - (2x + 3y) = -6x - 2x - 3y = -8x - 3y,\ -(4a + 6b) - (-2b - 3a) = -4a + 3a - 6b + 2b = -a - 4b$$

Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian. Aby wykonać mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian, należy każdy składnik sumy pomnożyć przez ten jednomian według następującego wzoru: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
Jest to tzw. prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, na przykład:

$$(2a + 3b) \times 5a = 2a \times 5a + 3b \times 5a = 10a^2 + 15ab$$

Mnożenie sum algebraicznych przez siebie. Aby wykonać mnożenie sum algebraicznych przez siebie należy każdy składnik pierwszej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy, według wzoru: $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$
Na przykład:

$$(x + 3) \times (2x + 4) = x \times 2x + x \times 4 + 3 \times 2x + 3 \times 4 = 2x^2 + 10x + 12$$

Kolejność wykonywania działań
Matematyka to sztuka a w każdej sztuce konieczne jest opanowanie rzemiosła. Tym „rzemiosłem" jest prawidłowe wykonywanie działań. Pierwszeństwo mają zawsze działania w nawiasach. Potem wykonujemy potęgowanie, następnie mnożenie, i na końcu dodawanie (odejmowanie).
Wzory skróconego mnożenia. Wyprowadzimy teraz 3 zależności zwane wzorami skróconego mnożenia.
Kwadrat sumy:

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy:

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Różnica kwadratów:

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2 - ab + ab = a \times (a - b) + b \times (a - b) = (a - b) \times (a + b)$$

Oprócz powyższych przydatne są 4 kolejne:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \times (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \times (a^2 + ab + b^2)$$

Zamiana sumy algebraicznej na iloczyn

Często by rozwiązać równanie zamieniamy sumę algebraiczną na iloczyn. Możemy tego dokonać poprzez:
Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias, na przykład:

$$16x^2 + 8x - 32x^3 = 8x \times (2x + 1 - 4x^2)$$

Skorzystanie ze wzorów skróconego mnożenia, na przykład:

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x + 5y)^2$$

Odpowiednie pogrupowanie wyrazów, na przykład:

$$8 + 2a - 4b - ab = (8 - 4b) + (2a - ab) = 4 \times (2 - b) + a \times (2 - b) = (4 + a) \times (2 - b)$$

Logarytm z liczby

Logarytmem przy podstawie $a, (a \neq 1)$ z liczby dodatniej x nazywamy liczbę y, taką że $a^y = x$.

Fakt ten zapisujemy następująco:

$$y = log_a b$$

Własności logarytmów:

$$log_a 1 = 0, \; log_a a = 1$$

$$log_a (m \times n) = log_a m + log_a n,$$

$$log_a \left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n,$$

$$log_a n^b = b \times log_a n$$

oraz tzw. wzór na zamianę podstaw logarytmów:

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$