Wyrażenia algebraiczne

Zanim przejdziemy do meritum, krótkie przypomnienie pojęcia potęgi i pierwiastka.

Potęga o wykładniku naturalnym

Potęga liczby (o wykładniku naturalnym) to po prostu pomnożenie przez siebie danej liczby tyle razy ile wynosi wykładnik. Zapisujemy to następująco:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n}$$

Potęgę o wykładniku zerowym definiujemy z kolei tak:
Jeżeli $a \neq 0$ to $a^0 = 1$. Wyrażenie 0^0 nie ma sensu liczbowego.

Prawa działań na potęgach

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$; na przykład $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$; na przykład $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
3. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$; na przykład $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3 = 216$
4. $(a^n)^m = a^{n \times m}$; na przykład $(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12} = 4096$

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

Jeżeli $a \neq 0$ i n jest liczbą naturalną to:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

Na przykład:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27,\ \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243}$$

Pierwiastek z liczby

Jeżeli a >0 i $n > 1$ to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką liczbę b, że zachodzi: $b^n = a$. Pierwiastek stopnia n z liczby a oznaczamy $\sqrt[n]{a}$. Jeżeli $n = 2$ to w zapisie pomijamy n i piszemy $\sqrt{a}$.
Na przykład: $\sqrt{9} = 3$, bo $3^2 = 9$, $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$, $\sqrt[4]{\frac{625}{1296}} = \frac{5}{6}$, bo $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$.
Jeżeli $a < 0$ i $n > 1$ i n jest liczbą nieparzystą, to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką ujemną liczbę b, że zachodzi: $b^n = a$.
Nietrudno zauważyć, że nie z każdej liczby da się łatwo wyciągnąć pierwiastek. Już liczba 2 sprawia kłopoty. Podobnie 3, 5 i wiele innych. Jednak takie pierwiastki istnieją i są liczbami niewymiernymi.

Potęga o wykładniku wymiernym

Jeżeli $a > 0,\ m,\ n$ są liczbami całkowitymi, to:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Na przykład:
$16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8,\ \ 2^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2},\ \left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} = \frac{\left(\sqrt[4]{27}\right)^3}{27} = \frac{\sqrt[4]{3^9}}{27} = \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$.

W przypadku potęg o wykładniku całkowitym ujemnym i wymiernym obowiązują prawa działań identyczne jak w przypadku potęg o wykładniku naturalnym.
Nietrudno zauważyć, ż w przypadku $m = 1$ mamy: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Prawa działań na pierwiastkach

Jeżeli $a, b \geqslant 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi takimi, że $m, n \neq 0$ i $m, n \neq 1$ to:

1. $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$
5. $\sqrt[n]{a^n} = a$

Logarytm z liczby

Wprowadzimy teraz pojęcie logarytmu. Logarytmem przy podstawie $a, (a \neq 1)$ z liczby dodatniej x nazywamy liczbę y, taką że $a^y = x$.
Fakt ten zapisujemy następująco:

$$y = log_a b$$

Własności logarytmów:

1. $log_a 1 = 0,\ log_a a = 1$
2. $log_a (m \times n) = log_a m + log_a n$
3. $log_a \left(\frac{m}{n}\right) = log_a m - log_a n$
4. $log_a n^b = b \times log_a n$
5. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$

ten ostatni to wzór na zamianę podstaw logarytmów.

Wyrażenie algebraiczne

Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie zbudowane z liczb, liter, nawiasów oraz znaków działań, na przykład:

$$2xy,\ 4a(x+y),\ (x-1)^2\ , a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\ \frac{2m - 3n}{3m + 2n}$$

Symbole literowe występujące w wyrażeniu algebraicznym nazywamy zmiennymi.
Wartością liczbową wyrażenia algebraicznego dla danych wartości zmiennych nazywamy liczbę, którą otrzymamy po podstawieniu tych wartości w miejsce zmiennych. Wyrażenia algebraiczne służą do symbolicznego zapisywania różnych wielkości. Na przykład pole prostokąta o bokach a i b zapisujemy za pomocą wyrażenia ab, a objętość walca o promieniu r i wysokości h za pomocą wyrażenia $\pi r^2 h$.
Jednomian to iloczyn liczby i zmiennych, na przykład:

$$3a,\ \pi r^2 h,\ x^2 y z^3$$

Jednomiany podobne (wyrazy podobne), to jednomiany, w których występują te same zmienne w tej samej potędze – jednomiany podobne mogą różnić się jedynie współczynnikiem liczbowym. Jednomiany podobne można dodawać i odejmować (redukować wyrazy podobne). Zapisywanie jednomianów

w najprostszej postaci nazywamy porządkowaniem. Sumę dwóch lub większej liczby jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**.
Na przykład sumy algebraiczne to:

$$a^2 + b^2,\ xy^2 - x^2y^2 + x^2y,\ x^3 + y^3 + z^3$$

Iloczyn dwóch lub większej liczby sum algebraicznych nazywamy **iloczynem algebraicznym**.
Na przykład iloczyny algebraiczne to:

$$(a + b)(a - b),\ xy(x + y),\ (a - b)(b - c)(a - c)$$

Działania na wyrażeniach algebraicznych. Reguły opuszczania nawiasów. Jeżeli w sumie algebraicznej występują nawiasy, to nawiasy poprzedzone znakiem plus (lub gdy nie ma przed nimi żadnych znaków), można usunąć bez zmiany znaków przed wyrazami w nawiasach, na przykład:

$$2x + (3x - 4y) = 2x + 3x - 4y,\ (-2a) + (4a - 6b) = -2a + 4a - 6b$$

Nawiasy poprzedzone znakiem minus, można usunąć, zmieniając jednocześnie znak każdego wyrazu występującego w nawiasie na przeciwny, na przykład:

$$2x - (3x - 4y) = 2x - 3x + 4y,\ (-2a) - (4a - 6b) = -2a - 4a + 6b$$

<u>Dodawanie sum algebraicznych.</u> Aby wykonać dodawanie, należy najpierw opuścić nawiasy, a następnie zredukować wyrazy podobne, na przykład:

$$3x + (2x - 6y) = 3x + 2x - 6y = 5x - 6y,\ (4a + 3b) + (-8a - 6b) = 4a - 8a + 3b - 6b = -4a - 3b$$

<u>Odejmowanie sum algebraicznych.</u> Aby wykonać odejmowanie, należy najpierw opuścić nawiasy, a następnie zredukować wyrazy podobne, na przykład:

$$-6x - (2x + 3y) = -6x - 2x - 3y = -8x - 3y,\ -(4a + 6b) - (-2b - 3a) = -4a + 3a - 6b + 2b = -a - 4b$$

<u>Mnożenie sum algebraicznych</u> przez jednomian. Aby wykonać mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian, należy każdy składnik sumy pomnożyć przez ten jednomian według następującego wzoru: $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
Jest to tzw. prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, na przykład:

$$(2a + 3b) \times 5a = 2a \times 5a + 3b \times 5a = 10a^2 + 15ab$$

Mnożenie sum algebraicznych przez siebie. Aby wykonać mnożenie sum algebraicznych przez siebie należy każdy składnik pierwszej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy, według wzoru:

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Na przykład:

$$(x + 3) \times (2x + 4) = x \times 2x + x \times 4 + 3 \times 2x + 3 \times 4 = 2x^2 + 10x + 12$$

Kolejność wykonywania działań. Matematyka to sztuka a w każdej sztuce konieczne jest opanowanie rzemiosła. Tym „rzemiosłem” jest prawidłowe wykonywanie działań. Pierwszeństwo mają zawsze działania w nawiasach. Potem wykonujemy potęgowanie, następnie mnożenie, i na końcu dodawanie (odejmowanie).
Wzory skróconego mnożenia. Wyprowadzimy teraz 3 zależności zwane wzorami skróconego mnożenia.
Kwadrat sumy:

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy:

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Różnica kwadratów:

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2 - ab + ab = a \times (a-b) + b \times (a-b) = (a-b) \times (a+b)$$

Oprócz powyższych przydatne są 4 kolejne:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \times (a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \times (a^2 + ab + b^2)$$

Zamiana sumy algebraicznej na iloczyn

Często by rozwiązać równanie zamieniamy sumę algebraiczną na iloczyn. Możemy tego dokonać poprzez:
Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias, na przykład:

$$16x^2 + 8x - 32x^3 = 8x \times (2x + 1 - 4x^2)$$

Skorzystanie ze wzorów skróconego mnożenia, na przykład:

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x+5y)^2$$

Odpowiednie pogrupowanie wyrazów, na przykład:

$$8 + 2a - 4b - ab = (8-4b) + (2a - ab) = 4 \times (2-b) + a \times (2-b) = (4+a) \times (2-b)$$