WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

POTĘGIA O WYKŁADNIKU NATURALNYM

Potęga liczby (o wykładniku naturalnym) to po prostu pomnożenie przez siebie danej liczby tyle razy ile wynosi wykładnik. Zapisujemy to następująco:

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n}}$$

Na przykład: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Liczbę a nazywamy podstawą potęgi a n wykładnikiem potęgi. Naturalnie $\mathrm{a}^1 = \mathrm{a}$. Jeśli $a \neq 0$, przyjmujemy $\mathrm{a}^0 = 1$.

Na potęgach można wykonywać działania. I tak:

PRAWA DZIAŁAŃ NA POTĘGACH

$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$;	na przykład $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$;	na przykład $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$;	na przykład $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$
$\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$;	na przykład $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$

POTĘGA O WYKŁADNIKU CAŁKOWITYM UJEMNYM

Jeżeli $a \neq 0$ i n jest liczbą naturalną to:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}}$$

Na przykład: $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243}$

POTĘGA O WYKŁADNIKU ZEROWYM

Jeżeli $a \neq 0$ to:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

PIERWIASTEK Z LICZBY

Jeżeli $a > 0$ i $n > 1$ to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką liczbę b, że zachodzi: $b^n = a$. Pierwiastek stopnia n z liczby a oznaczamy $\sqrt[n]{a}$. Jeżeli $n = 2$ to w zapisie pomijamy n i piszemy $\sqrt{a}$.

Na przykład: $\sqrt{9} = 3$, bo $3^2 = 9$, $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$, $\sqrt[4]{\frac{625}{1296}} = \frac{5}{6}$, bo $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$

Jeżeli $a < 0$ i $n > 1$ i n jest liczbą nieparzystą, to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką ujemną liczbę b, że zachodzi: $b^n = a$.

Nietrudno zauważyć, że nie z każdej liczby da się łatwo wyciągnąć pierwiastek. Już liczba 2 sprawia kłopoty. Podobnie 3, 5 i wiele innych. Jednak takie pierwiastki istnieją i są liczbami niewymiernymi. Oznacza to chociażby, że ich rozwinięcie dziesiętne jest nieokresowe.

Ciekawostka: $\sqrt{-1} = i$ nazywany jest jednostką urojoną

POTĘGA O WYKŁADNIKU WYMIERNYM

Jeżeli $\mathrm{a} > 0$, m, n są liczbami całkowitymi, to:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Na przykład: $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

W przypadku potęg o wykładniku całkowitym ujemnym i wymiernym obowiązują prawa działań identyczne jak w przypadku potęg o wykładniku naturalnym.

Nietrudno zauważyć, ż w przypadku $m = 1$ mamy do czynienia z następującą sytuacją:

$$\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Mając na uwadze powyższą równość, przy łatwo wyprowadzić następujące zależności:

PRAWA DZIAŁAŃ NA PIERWIASTKACH

Jeżeli $a, b\ \geq 0$ oraz m, n są liczbami naturalnymi takimi, że $m, n \neq 0$ i $m, n \neq 1$ to:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[n]{a^n} = a}$$

WYRAŻENIE ALGEBRAICZNE

Wyrażeniem algebraicznym nazywamy wyrażenie zbudowane z liczb, liter, nawiasów oraz znaków działań, na przykład:

$$\boldsymbol{2xy}, \qquad \boldsymbol{a + 7}, \qquad \boldsymbol{7(x - 1)}, \qquad \boldsymbol{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Symbole literowe występujące w wyrażeniu algebraicznym nazywamy zmiennymi.

WARTOŚĆ LICZBOWA WYRAŻENIA ALGEBRAICZNEGO

Wartością liczbową wyrażenia algebraicznego dla danych wartości zmiennych nazywamy liczbę, którą otrzymamy po podstawieniu tych wartości w miejsce zmiennych.

Wyrażenia algebraiczne służą do symbolicznego zapisywania różnych wielkości. Na przykład pole prostokąta o bokach a i b zapisujemy za pomocą wyrażenia ab, a objętość walca o promieniu r i wysokości h za pomocą wyrażenia $\pi r^2 h$.

JEDNOMIAN

Jednomian to iloczyn liczby i zmiennych, na przykład: $3a,\ \pi r^2 h,\ x^2 y z^3$ itd.

Jednomiany podobne (wyrazy podobne), to jednomiany, w których występują te same zmienne w tej samej potędze – jednomiany podobne mogą różnić się jedynie współczynnikiem liczbowym.

Jednomiany podobne można dodawać i odejmować (redukować wyrazy podobne). Zapisywanie jednomianów w najprostszej postaci nazywamy porządkowaniem.

SUMA I ILOCZYN ALGEBRAICZNY

Sumę dwóch lub większej liczby jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**.

Na przykład sumy algebraiczne to: $\boldsymbol{a^2 + b^2}$, $\boldsymbol{xy^2 - x^2y^2 + x^2y}$, $\boldsymbol{x^3 + y^3 + z^3}$

Iloczyn dwóch lub większej liczby sum algebraicznych nazywamy **iloczynem algebraicznym**.

Na przykład iloczyny algebraiczne to: $\boldsymbol{(a + b)\ (a - b)}$, $\boldsymbol{xy(x + y)}$, $\boldsymbol{(a - b)(b - c)(a - c)}$

DZIAŁANIA NA WYRAŻENIACH ALGEBRAICZNYCH

Reguły opuszczania nawiasów. Jeżeli w sumie algebraicznej występują nawiasy, to nawiasy poprzedzone znakiem plus (lub gdy nie ma przed nimi żadnych znaków), można usunąć bez zmiany znaków przed wyrazami w nawiasach, na przykład:

$$2x + (3x - 4y) = 2x + 3x - 4y$$
$$(-2a) + (4a - 6b) = -2a + 4a - 6b$$

nawiasy poprzedzone znakiem minus, można usunąć, zmieniając jednocześnie znak każdego wyrazu występującego w nawiasie na przeciwny, na przykład:

$$2x-(3x-4y)=2x-3x+4y$$

$$(-2a)-(4a-6b)=-2a-4a+6b$$

Dodawanie sum algebraicznych. Aby wykonać dodawanie, należy najpierw opuścić nawiasy, a następnie zredukować wyrazy podobne, na przykład:

$$3x+(2x-6y)=3x+2x-6y=5x-6y$$

$$(4a+3b)+(-8a-6b)=4a-8a+3b-6b=-4a-3b$$

Odejmowanie sum algebraicznych. Aby wykonać odejmowanie, należy najpierw opuścić nawiasy, a następnie zredukować wyrazy podobne, na przykład:

$$-6x-(2x+3y)=-6x-2x-3y=-8x-3y$$

$$-(4a+6b)-(-2b-3a)=-4a+3a-6b+2b=-a-4b$$

Mnożenie sum algebraicznych przez jednomian. Aby wykonać mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian, należy każdy składnik sumy pomnożyć przez ten jednomian według następującego wzoru:

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

Jest to tzw. prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, na przykład:

$$(2a+3b)\cdot 5a=2a\cdot 5a+3b\cdot 5a=10a^2+15ab$$

Mnożenie sum algebraicznych przez siebie. Aby wykonać mnożenie sum algebraicznych przez siebie należy każdy składnik pierwszej sumy pomnożyć przez każdy składnik drugiej sumy, według wzoru:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

Na przykład:

$$(x+3)\cdot(2x+4)=x\cdot 2x+x\cdot 4+3\cdot 2x+3\cdot 4$$

KOLEJNOŚĆ WYKONYWANIA DZIAŁAŃ

Matematyka to sztuka a w każdej sztuce konieczne jest opanowanie rzemiosła. Tym „rzemiosłem” jest prawidłowe wykonywanie działań. Pierwszeństwo mają zawsze działania w nawiasach. Potem wykonujemy potęgowanie, następnie mnożenie, i na końcu dodawanie (odejmowanie). Opiszę to na przykładzie. Przypuśćmy, że mamy obliczyć wartość wyrażenia:

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}+3\cdot 2^{-3}\right]^{-2}$$

A zatem podnosimy do potęgi, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=-\frac{27}{8}$, $2^{-3}=\frac{1}{8}$. W nawiasie mamy zatem $-\frac{27}{8}+\frac{3}{8}=-3$. I na koniec $(-3)^{-2}=\frac{1}{9}$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Wyprowadzimy teraz 3 zależności zwane **wzorami skróconego mnożenia**.

1. **Kwadrat sumy:**

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$$

2. **Kwadrat różnicy:**

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$$

3. **Różnica kwadratów:**

$$a^2-b^2=a^2-b^2-ab+ab=a(a-b)+b(a-b)=(a-b)\cdot(a+b)$$

Oprócz powyższych przydatne są 2 kolejne:

$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$ suma sześcianów = suma razy niepełny kwadrat różnicy

$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ różnica sześcianów = różnicy razy niepełny kwadrat sumy

ZAMIANA SUMY ALGEBRAICZNEJ NA ILOCZYN

Często by rozwiązać równanie zamieniamy sumę algebraiczną na iloczyn. Możemy tego dokonać poprzez:

– wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias, na przykład:

$$16x^2 + 8x - 32x^3 = 8x \cdot (2x + 1 - 4x^2)$$

– skorzystanie ze wzorów skróconego mnożenia, na przykład:

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x + 5y)^2$$

$$9xa^2 - 24ab + 16b^2 = (3a - 4b)^2$$

$$49 - 36x^2 = (7 + 6x) \cdot (7 - 6x)$$

– odpowiednie pogrupowanie wyrazów, na przykład:

$$8 + 2a - 4b - ab = (8 - 4b) + (2a - ab) = 4 \cdot (2 - b) + a \cdot (2 - b) = (4 + a) \cdot (2 - b)$$

LOGARYTM Z LICZBY

Logarytmem przy podstawie $a, (a \neq 1)$ z liczby dodatniej x nazywamy liczbę y, taką że $a^y = x$.

Fakt ten zapisujemy następująco:

$$\boldsymbol{y = loga}.$$

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW:

$$\boldsymbol{log_a 1 = 0,\ log_a a = 1}$$

$$\boldsymbol{log_a m \cdot n = log_a m + log_a n,}$$

$$\boldsymbol{log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n,}$$

$$\boldsymbol{log_a n^b = b \cdot log_a n}$$

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$$