LOGIKA MATEMATYCZNA, ZBIORY I LICZBY RZECZYWISTE

ZDANIA W LOGICE

Zdaniem nazywamy w logice wypowiedź twierdzącą, której można przypisać jedną z dwóch ocen: prawdę lub fałsz. Zdanie zaczynające się np. od "czy" nie będzie zatem zdaniem w sensie logiki matematycznej. Wartość logiczną zdania prawdziwego przyjmujemy umownie 1, zdania fałszywego zaś 0. Zdania na ogół oznaczamy małymi literami: p, q.

Na przykład zdanie: „13 jest liczbą pierwszą" jest (w arytmetyce) zdaniem prawdziwym (wartość logiczna 1), zaś zdanie „13 jest liczbą parzystą" jest zdaniem fałszywym (wartość logiczna 0). Zdanie: „Czy kwadrat jest czworokątem?" nie jest twierdzące, zatem nie ma wartości logicznej. Zdanie: „Prosta jednym ruchem gałki ocznej niszczy galaktyki" jest wprawdzie twierdzące, ale zarówno w ramach geometrii jak i astronomii bezsensowne. Logika nie ustala wartości logicznych zdań. Czyni to odpowiednia nauka. Na przykład zdanie: „Istnieje liczba będąca ilorazem 5 i 13" jest fałszywe w arytmetyce liczb naturalnych (bo ułamek $\frac{5}{13}$ nie jest liczbą naturalną), ale prawdziwe w arytmetyce liczb wymiernych czy też rzeczywistych. Oczywiście to samo zdanie nie posiada wartości logicznej na przykład w etyce czy biologii.

DZIAŁANIA NA ZDANIACH

Negację (zaprzeczenie) zdania $\boldsymbol{p}$, czyli zdanie „nieprawda, że p" oznaczamy:

$$\sim \boldsymbol{p}$$

Na przykład jeżeli $\boldsymbol{p}$ oznacza zdanie: „3 jest liczbą parzystą" to $\sim \boldsymbol{p}$ oznacza zdanie: „Nieprawda, że 3 jest liczbą parzystą". W tym przykładzie zdanie $\boldsymbol{p}$ jest fałszywe, a zdanie $\sim \boldsymbol{p}$ jest prawdziwe.

Zdania: $\boldsymbol{p}$ i $\sim \boldsymbol{p}$ nazywamy sprzecznymi.

Koniunkcję zdań p i q czyli zdanie „p i q" oznaczamy:

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$$

Koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym tylko gdy oba zdania są prawdziwe. Na przykład zdanie: „Kwadrat jest czworokątem i 7 jest liczbą pierwszą" jest prawdziwe, natomiast zdanie „Kwadrat nie jest czworokątem i 7 jest liczbą parzystą" jest fałszywe.

Alternatywę zdań zdań p i q czyli zdanie „p lub q" oznaczamy:

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$$

Alternatywa dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko w przypadku gdy oba zdania są fałszywe. Na przykład zdanie: „Kwadrat jest czworokątem lub 7 jest liczbą parzystą" jest prawdziwe, natomiast zdanie „Kwadrat nie jest czworokątem lub 7 jest liczbą parzystą" jest fałszywe. Podobnie zdanie „6 jest liczbą parzystą lub 6 jest liczbą nieparzystą" jest prawdziwe, natomiast zdanie „7 jest podzielne przez 2 lub 7 jest podzielne przez 3" jest fałszywe.

Implikację (wynikanie) zdań p i q, czyli zdanie „jeśli p, to q" oznaczamy:

$$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$$

Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, a zdanie q następnikiem implikacji. Implikacja dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko w przypadku gdy poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy.

Implikacja jest najciekawszym przypadkiem rachunku zdań. Przeczy ona bowiem czasem zdrowemu rozsądkowi. W mowie potocznej nie używamy słowa "wynika" w tak szerokim znaczeniu. Na przykład nie mówimy o wynikaniu gdy zarówno poprzednik jak i następnik są fałszywe. Tymczasem w logice matematycznej takie zdanie jest prawdziwe!

Równoważność zdań p i q, czyli zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q" oznaczamy:

$$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$$

Równoważność jest prawdziwa, gdy po obu stronach stoją zdania o tej samej wartości logicznej. Inaczej mówiąc, jeżeli równoważność jest prawdziwa, to zdania p i q nazywamy zdaniami równoważnymi. Na przykład: $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Równoważność jest uogólnieniem równości, stąd nieprzypadkowe podobieństwo symboli.

Tabela wartości logicznych negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{\sim q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**

TAUTOLOGIA

Tautologia to zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań prostych, z których się składa. Na przykład prawdziwe jest zawsze zdanie: „Jest mróz i jeżeli jest mróz, to woda w jeziorze zamarza, zatem woda w jeziorze zamarza". Prawdziwe jest też zdanie: „Jeżeli Jan wygrał w totka lub Piotr wygrał w totka, to jeżeli Jan nie wygrał w totka, to Piotr wygrał w totka". Najbardziej znanymi tautologiami są podane niżej prawa:

Prawo wyłączonego środka:

$$\boldsymbol{p \vee \sim p}$$

Dla dowolnego zdania p albo ono samo jest prawdziwe, albo prawdziwe jest jego zaprzeczenie.

Prawo transpozycji:

$$\boldsymbol{(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)}$$

I prawo de Morgana:

$$\boldsymbol{\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow\ \sim p \vee \sim q}$$

Negacja koniunkcji zdań p i q jest równoważne alternatywie negacji zdań p i q.

II prawo de Morgana:

$$\boldsymbol{\sim(p \vee q) \Leftrightarrow\ \sim p \wedge \sim q}$$

Negacja alternatywy zdań p i q jest równoważne koniunkcji negacji zdań p i q.

KWADRAT LOGICZNY TWIERDZEŃ

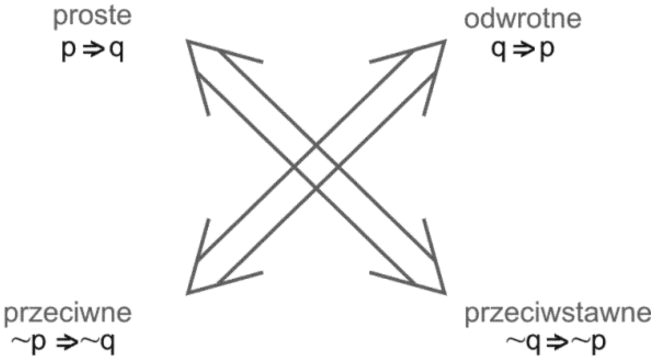
Twierdzenia matematyczne na ogół mają postać implikacji. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest twierdzeniem, to jej poprzednik p nazywamy założeniem twierdzenia, następnik q tezą twierdzenia.

Dla danej implikacji $p \Rightarrow q$, którą nazywamy prostą, implikację $q \Rightarrow p$ nazywamy odwrotną. Prawdziwość jednej z nich na ogół nie pociąga za sobą prawdziwości drugiej.

Dla implikacji prostej $p \Rightarrow q$, implikację $\sim q \Rightarrow \sim p$ nazywamy przeciwstawną.

Dla implikacji prostej $p \Rightarrow q$, implikację $\sim p \Rightarrow \sim q$ nazywamy przeciwną.

Implikacja prosta i przeciwstawna są równoważne oraz równoważne są implikacje odwrotna i przeciwna. Zależności te można przedstawić na tzw. kwadracie logicznym twierdzeń.



Przy wierzchołkach kwadratu położonych wzdłuż na samej przekątnej znajdują się implikacje równoważne. Każda z par implikacji: prosta i przeciwna oraz odwrotna i przeciwstawna stanowi tzw. zamknięty układ implikacji. Dla dowodu twierdzenia postaci $p \Leftrightarrow q$, wystarczy udowodnić implikację prostą $p \Rightarrow q$ i odwrotną $q \Rightarrow p$.

Z kwadratu logicznego wynika, że dla dowodu twierdzenia $p \Leftrightarrow q$ wystarczy udowodnić jedną z par implikacji występujących w tym kwadracie przy wspólnym boku.

Oto przykładowe cztery twierdzenia tworzące kwadrat logiczny:

Twierdzenie proste:
Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 25, to dzieli się przez 5. (Prawda)
Twierdzenie odwrotne:
Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 5, to dzieli się przez 25. (Fałsz)
Twierdzenie przeciwstawne:
Jeżeli liczba naturalna nie dzieli się przez 5, to nie dzieli się przez 25. (Prawda)
Twierdzenie przeciwne:
Jeżeli liczba naturalna nie dzieli się przez 25, to nie dzieli się przez 5. (Fałsz)

KWANTYFIKATORY – OGÓLNY I SZCZEGÓŁOWY

Ważną rolę w formułowaniu twierdzeń i definicji, odgrywają wyrażenia „dla każdego" i „istnieje". Wyrażenia te oznaczane są specjalnymi symbolami:

symbol $\bigwedge$ oznacza „dla każdego"

symbol $\bigvee$ oznacza „istnieje"

Zdanie: „Dla każdej liczby rzeczywistej x, zachodzi $x^2 + 1 > 0$" zapisujemy:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 1 > 0$$

Zdanie: „Istnieje taka liczba rzeczywista x, że $x^2 = 1$" zapisujemy:

$$\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 1$$

Znaki $\bigwedge$ i $\bigvee$ nazywamy odpowiednio kwantyfikatorem ogólnym i szczegółowym.

Czasem zamiast symboli $\bigwedge$ i $\bigvee$, używane są znaki $\forall$ i $\exists$.

POJĘCIE PIERWOTNE, ZBIÓR, ELEMENT

Pojęcie **zbioru** jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych. Jest to pojęcie pierwotne, którego nie definiuje się, a którego znaczenie jest intuicyjnie oczywiste.

Zbiór będziemy rozumieć jako pewną całość złożoną z pojedynczych obiektów, nazywanych **elementami** tego zbioru. Elementy zbioru mogą być zupełnie dowolne.

Zbiory oznaczamy wielkimi literami, np. A, B, C, lub A_1, A_2, A_3 itd. Elementy zbioru oznaczamy zaś literami małymi, np. a, b, c, lub a_1, a_2, a_3 ... itd. Jeśli element a należy do zbioru A zapisujemy to symbolicznie $a \in A$. Symbol $\in$ oznacza „należy do”.

Elementami zbioru mogą być inne zbiory. Na przykład zbiór $A = \{\{a_1, a_2\}, a_3\}$ zawiera dwa elementy: $\{a_1, a_2\}$ i a_3. Element $\{a_1, a_2\}$ sam jest zbiorem (dwuelementowym), ale uwaga, jego elementy nie są elementami zbioru A.

Zbiór zawierający n elementów: $a_1, a_2, \ldots\ a_n$ zapisujemy symbolicznie umieszczając elementy w nawiasach klamrowych: $\{a_1, a_2, \ldots\ a_n\}$. Zbiór można określić również wymieniając własność, którą posiadają jego wszystkie elementy, na przykład zapis $A = \{n: n \in N\ i\ n < 7\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od 7 czyli zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ZBIÓR SKOŃCZONY, ZBIÓR NIESKOŃCZONY, ZBIÓR PUSTY, MOC ZBIORU

Zbiór zawierający skończenie wiele elementów nazywamy **zbiorem skończonym**. W otaczającej nas rzeczywistości mamy do czynienia tylko z takimi zbiorami. Liczbę elementów zbioru A oznaczamy $|A|$ i nazywamy **mocą zbioru** A.

Zbiór, który nie jest skończony (a z takimi mamy często do czynienia w matematyce) nazywamy **zbiorem nieskończonym**. Przykład: zbiór punktów na prostej, zbiór ułamków, zbiór funkcji liniowych itd. Moc zbioru skończonego to po prostu liczba jego elementów.

Ciekawostka: zbiory nieskończone, tak jak zbiory skończone, mogą mieć różne moce.

Zbiór nie zawierający żadnego elementu nazywa się **zbiorem pustym**, oznaczamy go $\emptyset$. Istnieje tylko jeden zbiór pusty (jest to jeden z tzw. aksjomatów teorii zbiorów mnogości).

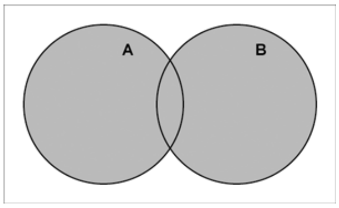
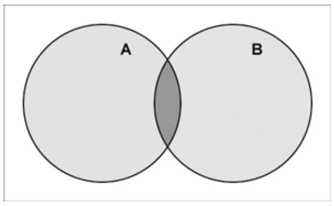
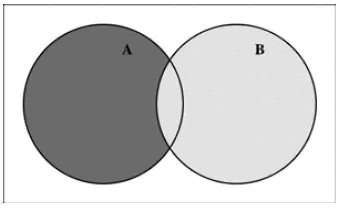
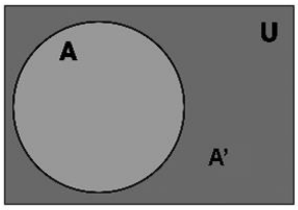
RÓWNOŚĆ ZBIORÓW, ZAWIERANIE SIĘ ZBIORÓW

Zbiory A i B są **równe**, wtedy i tylko wtedy gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A.

Jeżeli każdy element należący do A należy jednocześnie do zbioru B, to zbiór A nazywa się **podzbiorem** zbioru B. Mówimy też, że zbiór A zawiera się w zbiorze B. Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem (tak zwanym podzbiorem niewłaściwym). Zbiór pusty $\emptyset$ jest podzbiorem każdego zbioru. Przykład: zbiór kwadratów zawiera się w zbiorze prostokątów, z kolei zbiór prostokątów zawiera się w zbiorze równoległoboków, ten zawiera się w zbiorze trapezów, a z kolei zbiór trapezów zawiera się w zbiorze czworokątów. W zbiorze czworokątów, zawiera się też na przykład zbiór deltoidów, którego z kolei podzbiorem jest zbiór rombów.

DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Na zbiorach, podobnie jak na liczbach można wykonywać działania. Mają one podobne nazwy, ale ich rezultat jest nieco inny niż w przypadku działań na liczbach. I tak po kolei:

Suma zbiorów: Suma zbiorów A i B jest to zbiór elementów należących do zbioru A lub do zbioru B i tylko do nich. W istocie suma to po prostu obydwa zbiory połączone w jeden. Sumę zbiorów A i B zapisujemy: $A \cup B$ <u>Przykłady</u>: Sumą zbiorów $\{1,2\}$ i $\{2,3\}$ jest zbiór $\{1,2,3\}$. Sumą zbioru liczb wymiernych i niewymiernych jest zbiór liczb rzeczywistych.	
Iloczyn zbiorów: Iloczyn zbiorów A i B jest to zbiór elementów należących jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn jest po prostu częścią wspólną zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B zapisujemy: $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ <u>Przykłady</u>: Iloczynem zbiorów $\{1,2\}$ i $\{2,3\}$ jest zbiór $\{2\}$. Iloczynem zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb całkowitych parzystych jest zbiór liczb naturalnych parzystych.	
Różnica zbiorów: Różnica zbiorów A i B jest to zbiór elementów należących do zbioru A ale nie należących do zbioru B. Mówiąc po prostu ze zbioru A "wyrzucamy" wszystko co nie należy do B. Różnicę zbiorów A i B zapisujemy: $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ <u>Przykład</u>: Różnicą zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb całkowitych parzystych jest zbiór liczb naturalnych nieparzystych.	
Przestrzeń i dopełnienie zbioru: Jeżeli rozpatrywane przez nas zbiory są podzbiorami ustalonego zbioru U to zbiór U nazywamy przestrzenią. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni U nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni U, które nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy A'. $A' = \mathrm{U} \setminus \mathrm{A}$ Dopełnienie zbioru A zapisujemy jako: A' <u>Przykład</u>: Dopełnieniem zbioru liczb wymiernych (w przestrzeni liczb rzeczywistych) jest zbiór liczb niewymiernych.	

PRAWA DZIAŁAŃ NA ZBIORACH (PRAWA DE MORGANA)

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące prawa:

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (prawo łączności sumy)
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (prawo łączności iloczynu)
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$ (prawo rozdzielności sumy względem iloczynu)
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (prawo rozdzielności iloczynu względem sumy)
5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (I prawo de Morgana)
6. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (II prawo de Morgana)

LICZBY NATURALNE

Najważniejszymi liczbami, zbiorem na bazie którego zbudowana jest cała matematyka jest **zbiór liczb naturalnych** $(1,2,3,\ldots)$. Oznaczamy go $\mathbb{N}$. Liczba naturalna to każda z liczb, do której możemy doliczyć, zaczynając od 1. Zbiór liczb naturalnych jest zbiorem nieskończonym gdyż nie istnieje największa liczba naturalna (można liczyć bez końca). Liczbą naturalną jest na przykład liczba $4,$ liczba 1000 czy liczba $100000000000^{100000000000}$. Matematyk niemiecki Leopold Kronecker (1823-1891) uważał, że liczby naturalne stworzył Bóg, a wszystko inne jest dziełem człowieka. Nie istnieje największa liczba naturalna, gdyż do każdej pomyślanej liczby można dodać 1 lub dowolną inną liczbę, otrzymując liczbę większą. Liczby naturalne służą po prostu do liczenia a także ustalania kolejności. Pojęcie liczby naturalnej jest jednym z najstarszych i najbardziej abstrakcyjnych pojęć, co wcale nie przeszkadza nam z nich korzystać. Dysponując jedynką, łatwo jest otrzymać wszystkie inne liczby naturalne. Jak? Ano trzeba tylko cierpliwie dodawać.

LICZBY PIERWSZE I ZŁOŻONE

Ważnymi liczbami wśród liczb naturalnych są **liczby pierwsze**. Liczba naturalna p jest liczbą pierwszą, jeśli $p \neq 1$ i p dzieli się tylko przez 1 i przez siebie. Liczb pierwszych jest nieskończonie wiele (czyli nie istnieje największa liczba pierwsza). Liczbę naturalną, która nie jest liczbą pierwszą nazywamy **liczbą złożoną**.

Ciekawostka: Największa odkryta dotąd liczba pierwsza ma ponad 17 milionów cyfr.

Zapis jej jest bardzo prosty, $p = 2^{57885161} - 1$.

ROZKŁAD LICZBY NA CZYNNIKI PIERWSZE

Każdą liczbę naturalną daje się przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych (mogą one się powtarzać) tylko na 1 sposób. Przedstawienie to nazywamy **rozkładem liczby na czynniki pierwsze**. Dla przykładu $1500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Liczby pierwsze mają wielkie znaczenie w teorii liczb. A oto wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 100:

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$

LICZBY CAŁKOWITE

Liczby całkowite to liczby naturalne, liczby do nich przeciwne (patrz niżej) i 0. Wypiszmy kilka liczb całkowitych: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Jak widać nie istnieje ani największa ani najmniejsza liczba całkowita. W przypadku liczb naturalnych liczbą najmniejszą jest oczywiście liczba 1.

Liczby całkowite różniące się tylko znakiem nazywamy liczbami przeciwnymi. Liczbą przeciwną do 0 jest 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy $\mathbb{Z}$.

LICZBY WYMIERNE

Liczby wymierne to po prostu ułamki. Oczywiście każda liczba całkowita też jest ułamkiem (a zatem liczbą wymierną) o mianowniku 1. Liczby wymierne to na przykład $1, -2, \frac{127}{721}, 3.14159$. Liczbami wymiernymi nie są $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, o czym dalej. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy $\mathbb{Q}$.

Ciekawostka: Zbior liczb wymiernych ma tyle samo elementów co zbiór liczb naturalmych.

LICZBY NIEWYMIERNE

Liczba niewymierna to liczba, której nie da się przedstawić w postaci ułamka. Na przykład liczbami niewymiernymi są pierwiastki dowolnego stopnia z liczb całkowitych, które same nie są liczbami całkowitymi (np. $\boldsymbol{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \dots}$) Inną liczbą niewymierną jest liczba $\boldsymbol{\pi \cong 3,14159}$ (stosunek długości okręgu do jego średnicy), a także zapewne jeszcze nieznaną nam, ale bardzo ważna w matematyce liczba $\boldsymbol{e \cong 2,7182}$ (tzw. liczba Eulera).

LICZBY RZECZYWISTE

Pojęcie liczby rzeczywistej jest obejmuje wszystkie rodzaje liczb: liczby naturalne, całkowite, ułamki, oraz liczby niewymierne. Wszystkie liczby rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$.

UŁAMKI DZIESIĘTNE: SKOŃCZONE, NIESKOŃCZONE OKRESOWE, NIESKOŃCZONE NIEOKRESOWE

Ułamkiem dziesiętnym nazywamy ułamek, którego mianownik jest pewną potęgą o wykładniku naturalnym liczby 10. Ułamki dziesiętne zapisuje się bez kreski ułamkowej, ale specjalną funkcję pełni przecinek, który oddziela część całkowitą od części ułamkowej. Pierwsze miejsce po przecinku oznacza części dziesiąte, drugie setne, trzecie tysiączne, itd. Jeżeli ciąg cyfr po przecinku się kończy, mamy do czynienia z ułamkiem dziesiętnym **skończonym**. Na ułamek dziesiętny skończony można przekształcić każdy ułamek zwykły, którego mianownik jest postaci $2^m \cdot 5^n$ (w rozkładzie mianownika na czynniki pierwsze występuje iloczyn tylko potęg liczb 2 i 5).

Na przykład:

$$\frac{1}{160} = \frac{1}{2^5 \cdot 5} = \frac{5^4}{2^5 \cdot 5 \cdot 5^4} = \frac{625}{10^5} = \frac{625}{100000} = 0{,}0625$$

Ułamkiem dziesiętnym okresowym nazywamy ułamek dziesiętny, w zapisie którego od pewnego miejsca określony zestaw cyfr powtarza się w nieskończoność. Na ułamek dziesiętny okresowy można przekształcić każdy ułamek zwykły, w któtego mianowniku występują potęgi innych liczb niż 2 lub 5. Przekształcenie takiego ułamka zwykłego do postaci ułamka dziesiętnego okresowego polega na wykonaniu pisemnego dzielenia licznika przez mianownik, do momentu w którym cyfry po przecinku zaczną się powtarzać.

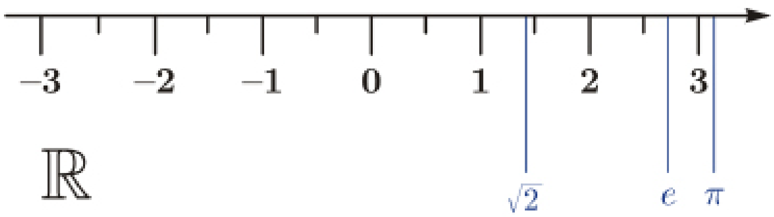
Przekształcimy ułamek dziesiętny okresowy na zwykły na przykładzie ułamka okresowego $0{,}1(23)$. Oznaczmy $x = 0,(23)$, zatem $100x = 23,(23)$. Odejmując stronami obie równości dostajemy równość $99x = 23$, skąd otrzymujemy $x = \frac{23}{99}$.

Ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieokresowym nazywamy ułamek dziesiętny, w zapisie którego po przecinku występuje nieskończenie wiele cyfr, pośród których których żaden ich ciąg nie powtarza się, na przykład $0{,}123456789101112131415\ldots$ (po przecinku występują kolejne liczby naturalne) lub $0{,}101001000100001\ldots$ (między kolejnymi jedynkami zwiększa się liczba zer). Ułamki dziesiętne nieskończone nieokresowe reprezentują liczby niewymierne.

OŚ LICZBOWA

Zbiór liczb rzeczywistych można przedstawić w postaci osi liczbowej. Jest to prosta, na której ustalono punkty odpowiadające liczbie 0 i liczbie 1. Gdzie są pozostałe liczby? Położenie liczb całkowitych widać od razu. Liczby wymierne (ułamki) też łatwo znaleźć (jak?). Punkty, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej reprezentują liczby niewymierne. Znalezienie położenia liczby niewymiernej na osi liczbowej jest czasem trudne.

Dzięki temu modelowi każdej liczba rzeczywistej odpowiada pewien punkt na osi liczbowej i odwrotnie, każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada pewna liczba rzeczywista.



PROCENTY I PUNKTY PROCENTOWE

Procent **(%)** to po prostu ułamek o mianowniku 100.

A zatem $1\% = \frac{1}{100}$, $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, $100\% = \frac{100}{100} = 1$. Ot i cała tajemnica.

Aby obliczyć dany procent z jakiejś liczby należy po prostu pomnożyć ułamek odpowiadający danemu procentowi przez tę liczbę.

<u>Przykład 1:</u> Komputer kosztował 1500 zł. Nastała promocja i obniżono jego cenę o 20%. Ile kosztuje teraz?

$1500 - 20\% \cdot 1500 = 1500 - \frac{20}{100} \cdot 1500 = 1500 - 300 = 1200$. Odp.: <u>Kosztuje 1200 zł.</u> ■

<u>Przykład 2:</u> Komputer po 30% obniżce kosztuje 910 zł. Ile kosztował przed obniżką?

Tym razem musimy wprowadzić niewiadomą x; jest to cena przed obniżką

Układamy równanie: $70\% \cdot x = 910$, czyli $\frac{70}{100} \cdot x = 910$, zatem $x = 1300$. <u>Odp.: 1300 zł.</u> ■

<u>Przykład 3</u>: Komputer kosztował 1000 zł, zaś po obniżce jego cena wynosi 750 zł. O ile procent została obniżona cena?

Jasne jest, że cenę obniżono o 250 zł. Musimy zatem ustalić jaki to procent ceny wyjściowej czyli zamienić ułamek $\frac{250}{1000}$ na procent. $\frac{250}{1000} = \frac{25}{100} = 25\%$. <u>Odp.: Cenę obniżono o 25%.</u> ■

<u>Przykład 4</u>: Komputer kosztował 1200 zł, następnie obniżono jego cenę o 25%, zaś po tygodniu cenę znów podwyższono o 25%. Czy koniec końców komputer staniał czy zdrożał?

Liczymy cenę po obniżce: $1200 - 25\% \cdot 1200 = 1200 - \frac{25}{100} \cdot 1200 = 1200 - 300 = 900$.

Czyli po obniżce kosztuje 900 zł. Teraz liczymy cenę po podwyżce:

$900 + 25\% \cdot 900 = 900 + \frac{25}{100} \cdot 900 = 900 + 225 = 1125$. <u>Odp.: Komputer staniał.</u> ■

<u>Przykład 5:</u> Zmieszano 100 g wody z 20 g soli. Ilu procentowy roztwór soli otrzymano?

Mamy 120 g mieszaniny, z czego 20 g to sól. Zatem $\frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0.1(6) = 16.(6)\%$. ■

Punkt procentowy jest to różnica między dwiema wartościami jednej wielkości podanymi w procentach.

Jeśli zarabiasz aktualnie 5 tys. zł, a szef mówi Ci, że jak będziesz dobrze pracował to dostaniesz 10 proc. podwyżki, a jak świetnie to 20%, to różnica pomiędzy 20% i 10% wynosi właśnie 10 punktów procentowych.

PRZEDZIAŁY LICZBOWE

Przedziałem liczbowym ograniczonym otwartym $(\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b})$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $a < x < b$. W przedziale otwartym nie istnieje liczba największa ani najmniejsza.

Przedziałem liczbowym ograniczonym domkniętym $\langle \boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b} \rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $a \leq x \leq b$. W przedziale domkniętym istnieje liczba największa b i liczba najmniejsza a.

Przedziałem liczbowym nieograniczonym otwartym $(\boldsymbol{a};\ +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x > a$.

Przedziałem liczbowym nieograniczonym domkniętym $\langle \boldsymbol{a};\ +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x \geq a$.

Przedziałem liczbowym nieograniczonym otwartym $(-\infty;\ \boldsymbol{a})$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x < a$.

Przedziałem liczbowym nieograniczonym domkniętym $(-\infty;\ \boldsymbol{a}\rangle$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x \leq a$.

Przedział $(-\infty;\ +\infty)$ to po prostu przedział zawierający wszystkie liczby rzeczywiste. Oprócz powyższych przedziałów istnieją również przedziały otwarto-domknięte, których zdefiniowanie nie nastręcza trudności.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY (MODUŁ)

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej nieujemnej (modułem) jest ta sama liczba, wartością bezwzględną liczby rzeczywistej ujemnej, jest liczba do niej przeciwna. Zapisujemy to tak:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{dla } a \geq 0 \\ -a, \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej odpowiada odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI Z WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ

Niekiedy wartość bezwzględna występuje w równaniach lub nierównościach. Jak sobie z nimi radzić pokazują poniższe przykłady.

<u>Przykład 1:</u> Rozwiązać równanie: $|x - 6| = 1$

Równanie rozwiążemy metodą „filozoficzną". Wartość bezwzględna jakiej liczby wynosi 1? Otóż są to liczby 1 i – 1. Zatem pod znakiem wartości bezwzględnej po lewej stronie równania musi stać 1 lub– 1. Skoro tak, to $x - 6 = 1$ lub $x - 6 = -1$. Zatem równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 7$ i $x_2 = 5$.

<u>Przykład 2:</u> Rozwiązać nierówność $|x - 6| > 3$

Równanie rozwiążemy również metodą „filozoficzną". Jaka liczba ma wartość bezwzględną większą od 3? Otóż liczba większa od 3 lub mniejsza od – 3. Zatem $x - 6 > 3$ lub $x - 6 < -3$. Skoro tak to $x > 9$ lub $x < 3$. Zatem rozwiązaniem nierówności są $x \in (-\infty, 3) \cup (9, +\infty)$.

BŁĘDY PRZYBLIŻEŃ (BŁĄD WZGLĘDNY I BEZWZGLĘDNY)

Błędy przybliżeń pokazują, w jakim stopniu zaokrąglana liczba jest „przekłamana", w stosunku do liczby pierwotnej. Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń, są to błąd bezwzględny i błąd względny. **Błąd bezwzględny Δ**, to wartość bezwzględna z różnicy przybliżenia a_0 i danej liczby a. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$\Delta = |a - a_0|$$

Błąd względny $\boldsymbol{\delta}$ pokazuje jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką zaniżyliśmy lub zawyżyliśmy daną liczbę. Wzór na błąd względny ma postać:

$$\delta = \frac{|a - a_0|}{a} = \frac{\Delta}{a}$$

RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI PIERWSZEGO STOPNIA Z 1 NIEWIADOMĄ

Równaniem z jedną niewiadomą x, nazywamy równanie postaci:

$$f(x) = 0$$

Gdzie $f(x)$ jest wyrażeniem algebraicznym, w którym występuje zmienna x oraz liczby.

Dziedzina równania, to zbiór wszystkich liczb, dla których wyrażenie algebraiczne f(x) ma sens liczbowy.

Rozwiązaniem równania z jedną niewiadomą x nazywamy każdą liczbę, która podstawiona za x czyni powyższą równość prawdziwą.

Przykłady równań:

$$3x - 9 = 0 \text{ (rozwiązaniem jest } x = 3\text{)}$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ (rozwiązaniami są } x = 2 \text{ i } x = -2\text{)}$$

$$\tfrac{x+1}{x-2} + 2 = 0 \text{ (rozwiązaniem jest } x = 1\text{)}$$

Niech a i b są liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.

Definicja 1. Równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x, nazywamy równanie postaci:

$$ax + b = 0$$

Definicja 2. Nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x, nazywamy nierówność postaci:

$$ax + b > 0 \text{ lub } ax + b < 0 \text{ lub } ax + b \geq 0 \text{ lub } ax + b \leq 0$$

Rozwiązaniem nierówności z 1 niewiadomą x nazywamy każdą liczbę, która podstawiona za x czyni nierówność prawdziwą.

Równania i nierówności pierwszego stopnia rozwiązywaliśmy w gimnazjum zatem nie będę sposobu ich rozwiązywania szczegółowo omawiał.