Logika matematyczna, zbiory i liczby rzeczywiste

Zdania w logice

Zdaniem nazywamy w logice wypowiedź twierdzącą, której można przypisać jedną z dwóch ocen: prawdę lub fałsz. Zdanie pytające nie będzie zatem zdaniem w sensie logiki matematycznej. Wartość logiczną zdania prawdziwego umownie wynosi 1, zdania fałszywego zaś 0. Zdania na ogół oznaczamy małymi literami: p, q. Na przykład zdanie: „13 jest liczbą pierwszą" jest zdaniem prawdziwym (wartość logiczna 1), zaś zdanie „13 jest liczbą parzystą" jest zdaniem fałszywym (wartość logiczna 0). Zdanie: „W mieście jest fryzjer, który strzyże wszystkich, którzy nie strzygą się sami" jest wprawdzie twierdzące, ale nie sposób przypisać mu żadnej wartości logicznej (polecam sprawdzić). Ważne jest by zdanie było jednoznaczne. Na przykład zdanie „Liczba 13 nie dzieli się przez 5" by było prawdziwe musi dotyczyć liczb naturalnych, w liczbach wymiernych czy rzeczywistych jest fałszywe.

Działania na zdaniach

Negację (zaprzeczenie) zdania p, czyli zdanie: „nieprawda, że p" oznaczamy: $\sim p$. Na przykład jeżeli p oznacza zdanie: „3 jest liczbą parzystą", to $\sim p$ oznacza zdanie: „Nieprawda, że 3 jest liczbą parzystą". W tym przykładzie zdanie p jest fałszywe, a zdanie $\sim p$ jest prawdziwe. Zdania: p i$\sim p$ nazywamy sprzecznymi.

Koniunkcję zdań p i q czyli zdanie „p i q" oznaczamy: $p \wedge q$. Koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym tylko gdy oba zdania są prawdziwe. Na przykład zdanie: „Kwadrat jest czworokątem i 7 jest liczbą pierwszą" jest prawdziwe, natomiast zdanie „Kwadrat jest czworokątem i 7 jest liczbą parzystą" jest fałszywe.

Alternatywę zdań zdań p i q czyli zdanie „p lub q" oznaczamy: $p \vee q$. Alternatywa dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko w przypadku gdy oba zdania są fałszywe. Na przykład zdanie: „Kwadrat jest czworokątem lub 7 jest liczbą parzystą" jest prawdziwe, natomiast zdanie „Kwadrat nie jest czworokątem lub 7 jest liczbą parzystą" jest fałszywe. Podobnie zdanie „6 jest liczbą parzystą lub 6 jest liczbą nieparzystą" jest prawdziwe, natomiast zdanie „7 jest podzielne przez 2 lub 7 jest podzielne przez 3" jest fałszywe.

Implikację (wynikanie) zdań p i q, czyli zdanie „jeśli p, to q" oznaczamy: $p \Rightarrow q$ Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, a zdanie q następnikiem implikacji. Implikacja dwóch zdań jest zdaniem fałszywym tylko w przypadku gdy poprzednik jest prawdziwy a następnik fałszywy. Implikacja jest najciekawszym przypadkiem rachunku zdań. Przeczy ona bowiem tak zwanemu zdrowemu rozsądkowi. W mowie potocznej nie rozumiemy wynikania w tak szerokim znaczeniu. Na przykład nie mówimy o wynikaniu gdy zarówno poprzednik jak i następnik są fałszywe. Tymczasem w logice matematycznej takie zdanie jest prawdziwe (jeśli z fałszu wynika fałsz)!

Równoważność zdań p i q, czyli zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q" oznaczamy: $p \Leftrightarrow q$ Równoważność jest prawdziwa, gdy po obu stronach stoją zdania o tej samej wartości logicznej. Inaczej mówiąc, jeżeli równoważność jest prawdziwa, to zdania p i q nazywamy zdaniami równoważnymi. Na przykład: $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Równoważność jest uogólnieniem równości, stąd nieprzypadkowe podobieństwo symboli.

Poniżej znajduje się tabela wartości logicznych negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

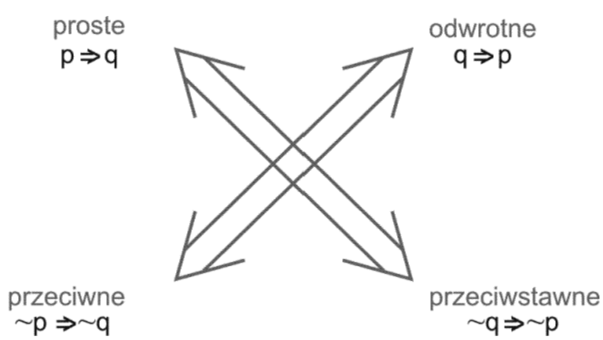
Tautologia

Tautologia to zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań prostych, z których się składa. Na przykład prawdziwe jest zawsze zdanie: „Jest mróz i jeżeli jest mróz, to woda w jeziorze zamarza, zatem woda w jeziorze zamarza". Prawdziwe jest też zdanie: „Jeżeli Jan wygrał w totka lub Piotr wygrał w totka, to jeżeli Jan nie wygrał w totka, to Piotr wygrał w totka". Najbardziej znanymi tautologiami są podane niżej prawa:

- Prawo wyłączonego środka: $p \vee \sim p$ (Dla dowolnego zdania p albo ono samo jest prawdziwe, albo prawdziwe jest jego zaprzeczenie.)
- Prawo transpozycji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (Zamiast powiedzieć jeżeli p to q można powiedzieć jeżeli nieprawda, że p to nieprawda, że q)
- I prawo de Morgana: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (Negacja koniunkcji zdań p i q jest równoważna alternatywie negacji zdań p i q.)
- II prawo de Morgana: $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ (Negacja alternatywy zdań p i q jest równoważna koniunkcji negacji zdań p i q.)

Kwadrat logiczny twierdzeń

Twierdzenia matematyczne na ogół mają postać implikacji. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ jest twierdzeniem, to jej poprzednik p nazywamy założeniem twierdzenia, następnik q tezą twierdzenia. Dla danej implikacji $p \Rightarrow q$, którą nazywamy prostą, implikację $q \Rightarrow p$ nazywamy odwrotną. Prawdziwość jednej z nich na ogół nie pociąga za sobą prawdziwości drugiej. Dla implikacji prostej $p \Rightarrow q$, implikację $\sim q \Rightarrow \sim p$ nazywamy przeciwstawną. Dla implikacji prostej $p \Rightarrow q$, implikację $\sim p \Rightarrow \sim q$ nazywamy przeciwną. Implikacja prosta i przeciwstawna są równoważne oraz równoważne są implikacje odwrotna i przeciwna. Zależności te można przedstawić na tzw. kwadracie logicznym twierdzeń.
Każda z par implikacji: prosta i przeciwna oraz odwrotna i przeciwstawna stanowi tzw. zamknięty układ implikacji. Dla dowodu twierdzenia postaci $p \Leftrightarrow q$, wystarczy udowodnić implikację prostą $p \Rightarrow q$ i odwrotną $q \Rightarrow p$. Z kwadratu logicznego wynika, że dla dowodu twierdzenia $p \Leftrightarrow q$ wystarczy udowodnić jedną z par implikacji występujących w tym kwadracie przy wspólnym boku.



Oto przykładowe cztery twierdzenia tworzące kwadrat logiczny:
Twierdzenie proste: Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 25, to dzieli się przez 5. (Prawda)
Twierdzenie odwrotne: Jeżeli liczba naturalna dzieli się przez 5, to dzieli się przez 25. (Fałsz)

Twierdzenie przeciwstawne: Jeżeli liczba naturalna nie dzieli się przez 5, to nie dzieli się przez 25. (Prawda)
Twierdzenie przeciwne: Jeżeli liczba naturalna nie dzieli się przez 25, to nie dzieli się przez 5. (Fałsz)

Kwantyfikatory – ogólny i szczegółowy

Ważną rolę w formułowaniu twierdzeń i definicji, odgrywają wyrażenia „dla każdego" i „istnieje". Wyrażenia te oznaczane są specjalnymi symbolami: symbol $\forall$ oznacza „dla każdego” symbol $\exists$ oznacza „istnieje” Zdanie: „Dla każdej liczby rzeczywistej x, zachodzi $x^2 + 1 > 0$" zapisujemy: $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 + 1 > 0$ Zdanie: „Istnieje taka liczba rzeczywista x, że $x^2 = 1$" zapisujemy: $\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 = 1$ Znaki $\forall$ i $\exists$ nazywamy odpowiednio kwantyfikatorem ogólnym i szczegółowym.

Pojęcie pierwotne, zbiór, element

Pojęcie zbioru jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych. Jest to tak zwane pojęcie pierwotne, którego nie definiuje się, a którego znaczenie jest intuicyjnie oczywiste. Zbiór będziemy rozumieć jako pewną całość złożoną z pojedynczych obiektów, nazywanych elementami tego zbioru. Elementy zbioru mogą być zupełnie dowolne. Zbiory oznaczamy wielkimi literami, np. $A, B, C, ...$ lub $A_1, A_2, A_3, ...$. Elementy zbioru oznaczamy zaś literami małymi, np. $a, b, c, ...$ lub $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Jeśli element a należy do zbioru A zapisujemy to symbolicznie $a \in A$. Symbol $\in$ oznacza „należy do”. Fakt, że zbiór A składa się z elementów a, b i c zapisujemy używając nawiasów klamrowych: $A = \{a, b, c\}$. Elementami zbioru mogą być inne zbiory. Na przykład zbiór $A = \{\{a_1, a_2\}, a_3\}$ zawiera dwa elementy: $\{a_1, a_2\}$i a_3. Element $\{a_1, a_2\}$ sam jest zbiorem (dwuelementowym), ale uwaga, jego elementy nie są już elementami zbioru A. Zbiór można określić również wymieniając własność, którą posiadają jego wszystkie elementy, na przykład zapis $\{A = n : n \in N \wedge n < 7\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od 7 czyli zbiór $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zbiór skończony, zbiór nieskończony, zbiór pusty, moc zbioru

Zbiór zawierający skończenie wiele elementów nazywamy zbiorem skończonym. W otaczającej nas rzeczywistości mamy do czynienia tylko z takimi zbiorami. Liczbę elementów zbioru skończonego A oznaczamy $|A|$ lub $\overline{A}$ i nazywamy mocą zbioru A. Zbiór, który nie jest skończony (a z takimi mamy często do czynienia w matematyce) nazywamy zbiorem nieskończonym. Przykład: zbiór punktów na prostej, zbiór ułamków, zbiór funkcji liniowych itd. Moc zbioru nieskończonego to tak zwana liczba kardynalna. Ciekawostka: zbiory nieskończone, tak jak zbiory skończone, mogą mieć różne moce. Zbiór nie zawierający żadnego elementu nazywa się zbiorem pustym, oznaczamy go $\emptyset$. Istnieje tylko jeden zbiór pusty (jest to jeden z tzw. aksjomatów teorii zbiorów mnogości).

Równość zbiorów, podzbiór, zawieranie się zbiorów

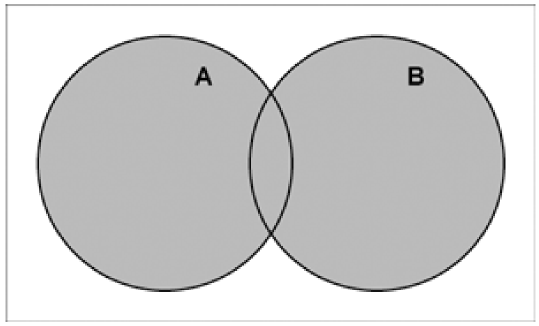
Zbiory A i B są równe, wtedy i tylko wtedy gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A.

Jeżeli każdy element należący do zbioru A należy jednocześnie do zbioru B, to zbiór A nazywa się podzbiorem zbioru B. Mówimy też, że zbiór A zawiera się w zbiorze B. Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem (tak zwanym podzbiorem niewłaściwym). Zbiór pusty $\emptyset$ jest podzbiorem każdego zbioru. Przykład: zbiór kwadratów zawiera się w zbiorze prostokątów, z kolei zbiór prostokątów zawiera się w zbiorze równoległoboków, ten zawiera się w zbiorze trapezów, a z kolei zbiór trapezów zawiera się w zbiorze czworokątów. W zbiorze czworokątów, zawiera się też na przykład zbiór deltoidów, którego z kolei podzbiorem jest zbiór rombów.

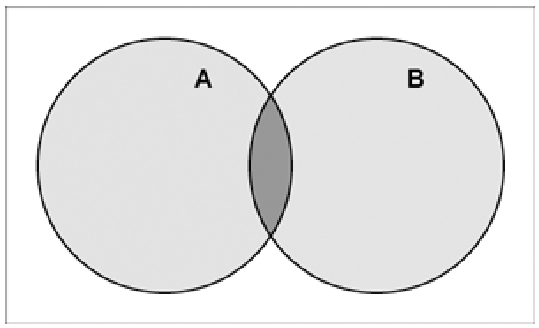
Działania na zbiorach

Na zbiorach, podobnie jak na liczbach można wykonywać działania. Mają one podobne nazwy, ale ich rezultat jest nieco inny niż w przypadku działań na liczbach. I tak po kolei:

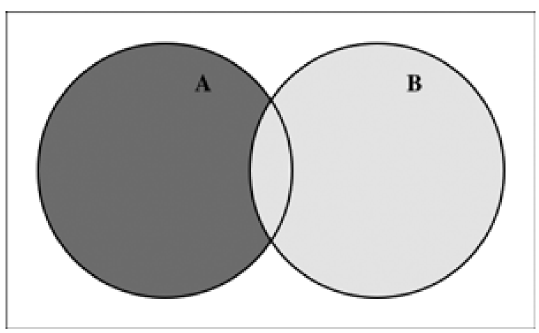
Suma zbiorów: Suma zbiorów A i B jest to zbiór elementów należących do zbioru A lub do zbioru B i tylko do nich. W istocie suma to po prostu obydwa zbiory połączone w jeden. Sumę zbiorów A i B zapisujemy: $A \cup B$. Przykłady: Sumą zbiorów $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 3, 4\}$ jest zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$. Sumą zbioru liczb wymiernych i niewymiernych jest zbiór liczb rzeczywistych, o których to zbiorach będziemy jeszcze mówić.



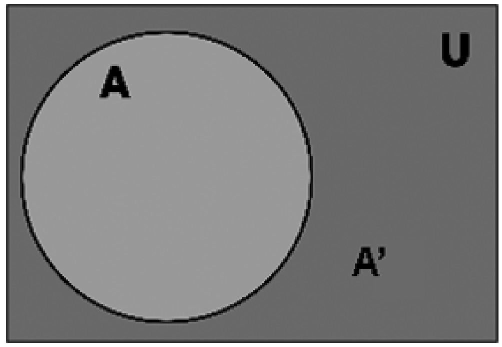
Iloczyn zbiorów: Iloczyn zbiorów A i B jest to zbiór elementów należących jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn jest po prostu częścią wspólną zbiorów. Iloczyn zbiorów A i B zapisujemy: $A \cap B$ Przykłady: Iloczynem zbiorów $\{1, 2, 3\}$ i $\{2, 3, 4\}$ jest zbiór $\{2, 3\}$. Iloczynem zbioru liczb podzielnych przez 2 i zbioru liczb podzielnych przez 3 jest zbioru liczb podzielnych przez 6.



Różnica zbiorów: Różnica zbiorów A i B jest to zbiór elementów należących do zbioru A ale nie należących do zbioru B. Mówiąc po prostu ze zbioru A "wyrzucamy" wszystko co należy do zbioru B. Różnicę zbiorów A i B zapisujemy: $A \setminus B$ Przykład: Różnicą zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb całkowitych parzystych jest zbiór liczb naturalnych nieparzystych.



Przestrzeń i dopełnienie zbioru: Jeżeli rozpatrywane przez nas zbiory są podzbiorami ustalonego zbioru U to zbiór U nazywamy przestrzenią. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni U nazywamy zbiór tych elementów przestrzeni U, które nie należą do zbioru A. Dopełnienie zbioru A oznaczamy A'. $A' = U \setminus A$. Przykład: Dopełnieniem zbioru liczb wymiernych (w przestrzeni liczb rzeczywistych) jest zbiór liczb niewymiernych.



Prawa działań na zbiorach i prawa de Morgana

Dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą następujące prawa:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (prawo łączności sumy)
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (prawo łączności iloczynu)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (prawo rozdzielności sumy względem iloczynu)
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (prawo rozdzielności iloczynu względem sumy)
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (I prawo de Morgana - dopełnienie sumy jest równe iloczynowi dopełnień)
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (II prawo de Morgana - dopełnienie iloczynu jest równe sumie dopełnień)

Liczby naturalne

Najważniejszymi liczbami, zbiorem na bazie którego zbudowana jest cała matematyka jest zbiór liczb naturalnych $(1, 2, 3, \ldots)$. Oznaczamy go $\mathbb{N}$. Liczba naturalna to każda z liczb, do której możemy doliczyć, zaczynając od 1. Zbiór liczb naturalnych jest zbiorem nieskończonym gdyż nie istnieje największa liczba naturalna (można liczyć bez końca). Liczbą naturalną jest na przykład liczba 4, liczba 1000 czy liczba $100000000000^{100000000000}$. Matematyk niemiecki Leopold Kronecker (1823-1891) twierdził, że Bóg stworzył liczby naturalne, a wszystko inne jest dziełem człowieka. Nie istnieje największa liczba naturalna, gdyż do każdej pomyślanej liczby można dodać 1 lub dowolną inną liczbę, otrzymując liczbę większą. Liczby naturalne służą po prostu do liczenia a także ustalania kolejności. Pojęcie liczby naturalnej jest jednym z najstarszych i najbardziej abstrakcyjnych pojęć, co wcale nie przeszkadza nam z niego korzystać. Dysponując jedynką, łatwo jest otrzymać wszystkie inne liczby naturalne. Jak? Ano trzeba tylko cierpliwie dodawać. Wynik dodawania (suma) liczb naturalnych i mnożenia (iloczyn) jest liczbą naturalną ale wynik odejmowania i dzielenia nie musi być liczbą naturalną. Mówimy, że działanie jest wykonalne w danym zbiorze gdy jego wynik należy zawsze do tego zbioru. Zatem w zbiorze liczb naturalnych wykonalne jest dodawania i mnożenie.

Liczby pierwsze i złożone. Bardzo ważnymi liczbami pośród liczb naturalnych są liczby pierwsze. Liczba naturalna p jest liczbą pierwszą, jeśli $p \neq 1$ i p dzieli się tylko przez 1 i przez siebie. Liczb pierwszych jest nieskończonie wiele (czyli nie istnieje największa liczba pierwsza). Liczbę naturalną, która nie jest liczbą pierwszą nazywamy liczbą złożoną. Liczby pierwsze mają wielkie znaczenie w teorii liczb. Między liczbą 2 i 100 leżą następujące liczby pierwsze:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Ciekawostka: największa odkryta dotąd liczba pierwsza ma ponad 17 milionów cyfr. Zapis jej jest bardzo prosty, $p = 2^{57885161} - 1$.

Rozkład liczby na czynniki pierwsze. Każdą liczbę naturalną daje się przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych (mogą one się powtarzać) tylko na 1 sposób. Przedstawienie to nazywamy rozkładem liczby na czynniki pierwsze. Dla przykładu $1500 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$. Aby rozłożyć liczbę naturalną na czynniki pierwsze należy daną liczbę dzielić (bez reszty) przez liczby pierwsze do momentu, aż zostanie tylko liczba 1.
NWD i NWW liczb naturalnych. Największy wspólny dzielnik liczb naturalnych jest to największa liczba przez którą dzielą się dane liczby. Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych jest to najmniejsza liczba która dzieli się przez dane liczby.
Aby obliczyć NWD danych liczb trzeba liczby te rozłożyć na czynniki pierwsze, a następnie przemnożyć przez siebie te czynniki pierwsze, które wystepują w rozkładzie każdej liczby. Aby obliczyć NWW danych liczb trzeba liczby te rozłożyć na czynniki pierwsze, a następnie przemnożyć jedną z liczb przez czynniki pierwsze drugiej liczby, które nie wystepują w rozkładzie pierwszej liczby. Jeśli spotkamy się z potrzebą obliczenia najmniejszej wspólnej wielokrotności z więcej niż dwóch liczb, można pogrupować je parami i liczyć najpierw po dwie, następnie ich wyniki łączyć w pary i ponownie obliczyć NWW.

Liczby całkowite

Liczby całkowite to liczby naturalne, liczby do nich przeciwne (naturalne ze znakiem minus) i 0. Wypiszmy kilka liczb całkowitych: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$. W przypadku liczb naturalnych liczbą najmniejszą jest oczywiście liczba 1 i nie istnieje liczba największa; w przypadku liczb całkowitych nie istnieje nie tylko największa ale też najmniejsza liczba całkowita. Liczby całkowite różniące się tylko znakiem nazywamy liczbami przeciwnymi. Liczbą przeciwną do 0 jest 0. Zbiór liczb całkowitych oznaczamy $\mathbb{Z}$. W zbiorze liczb całkowitych wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie.

Liczby wymierne

Liczby wymierne to po prostu dobrze znane nam ułamki $\frac{a}{b}$. Liczbę a nazywamy licznikiem ułamka, zaś b mianownikiem ułamka. Oczywiście każda liczba całkowita też jest ułamkiem (a zatem liczbą wymierną) o mianowniku 1. W zbiorze liczb wymiernych wykonalne jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie (z wyjątkiem dzielenia przez 0). Liczby wymierne to na przykład $1, \frac{2127}{7213}, 1.4159$. Liczbami wymiernymi nie są $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, o czym dalej. Zbiór liczb wymiernych oznaczamy $\mathbb{Q}$. Ciekawostka: Może wydawać się to dziwne, ale zbiór liczb wymiernych ma tyle samo elementów co zawarty w nim zbiór liczb naturalnych. Takie cuda są możliwe, ale tylko wśród zbiorów nieskończonych,
Ułamki dziesiętne: skończone, nieskończone okresowe. Ułamkiem dziesiętnym nazywamy ułamek, którego mianownik jest pewną potęgą o wykładniku naturalnym liczby 10. Ułamki dziesiętne zapisuje się bez kreski ułamkowej, ale z przecinkiem który oddziela część całkowitą od części ułamkowej. Pierwsze miejsce po przecinku oznacza części dziesiąte, drugie setne, trzecie tysiączne, itd. Jeżeli ciąg cyfr po przecinku się kończy, mamy do czynienia z ułamkiem dziesiętnym skończonym. Na ułamek dziesiętny skończony można przekształcić każdy ułamek zwykły, którego mianownik jest postaci $2^m \times 5^n$ (w rozkładzie mianownika na czynniki pierwsze występuje iloczyn tylko potęg liczb 2 i 5).
Na przykład:

$$\frac{1}{160} = \frac{1}{2^5 \times 5} = \frac{5^4}{2^5 \times 5^5} = \frac{625}{10^5} = \frac{625}{100000} = 0,0625$$

Ułamkiem dziesiętnym okresowym nazywamy ułamek dziesiętny, w zapisie którego od pewnego miejsca określony zestaw cyfr powtarza się w nieskończoność. Ułamki dziesiętne nieskończone okresowe reprezentują liczby wymierne. Na ułamek dziesiętny okresowy można przekształcić każdy ułamek zwykły, w któtego mianowniku występują też potęgi innych liczb niż 2 lub 5. Przekształcenie takiego ułamka zwykłego do postaci ułamka dziesiętnego okresowego polega na wykonaniu pisemnego dzielenia licznika przez mianownik, do momentu w którym cyfry po przecinku zaczną się powtarzać. Nieco trudniejsze jest przekształcanie w drugą stronę. Przekształcimy ułamek dziesiętny okresowy na zwykły na przykładzie ułamka okresowego $0,(23)$. Oznaczmy $x = 0,(23)$, zatem $100x = 23,(23)$. Odejmując stronami obie równości dostajemy równość $99x = 23$, skąd otrzymujemy $x = \frac{23}{99}$.

Liczby niewymierne

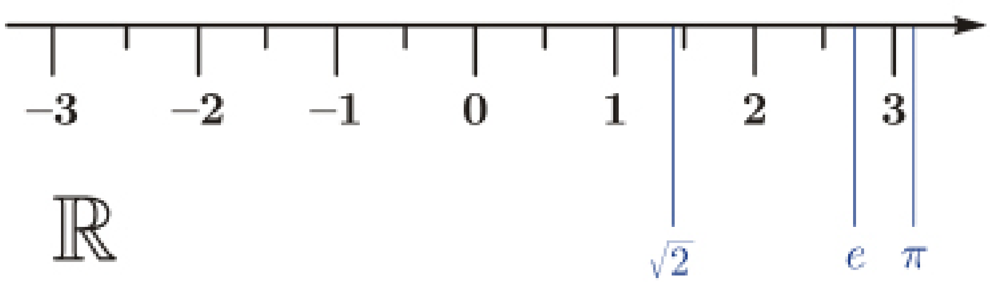
Liczba niewymierna to liczba, której nie da się przedstawić w postaci ułamka. Na przykład liczbami niewymiernymi są pierwiastki dowolnego stopnia z liczb całkowitych, które same nie są liczbami całkowitymi (np. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}$) Inną liczbą niewymierną jest liczba $\pi \cong 3,14159$ (jest to stosunek długości okręgu do jego średnicy), a także zapewne jeszcze nieznana nam, ale odgrywająca bardzo ważną rolę w matematyce liczba $e \cong 2,7182$ (tzw. liczba Eulera).
Ułamki dziesiętne nieskończone nieokresowe. Ułamkiem dziesiętnym nieskończonym nieokresowym nazywamy ułamek dziesiętny, w zapisie którego po przecinku występuje nieskończenie wiele cyfr, pośród których których żaden ich ciąg nie powtarza się, na przykład $0,123456789101112131415...$ (po przecinku występują kolejne liczby naturalne) lub $0,101001000100001...$ (między kolejnymi jedynkami zwiększa się liczba zer). Ułamki dziesiętne nieskończone nieokresowe reprezentują liczby niewymierne.

Liczby rzeczywiste

Pojęcie liczby rzeczywistej jest obejmuje wszystkie rodzaje liczb: liczby naturalne, całkowite, ułamki, oraz liczby niewymierne. Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}$.

Oś liczbowa

Zbiór liczb rzeczywistych można przedstawić w postaci osi liczbowej. Jest to prosta, na której ustalono punkty odpowiadające liczbie 0 i liczbie 1. Gdzie są pozostałe liczby? Położenie liczb całkowitych widać od razu. Liczby wymierne (ułamki) też łatwo znaleźć (jak?). Punkty, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej reprezentują liczby niewymierne. Aby na przykład znaleźć liczbę $\sqrt{2}$ należy skonstruować kwadrat o boku 1. Jeśli położymy jego przekątną na osi liczbowej tak by początek znajdował się w punkcie 0, koniec przekątnej wskazywał będzie na liczbę $\sqrt{2}$. Dokładne znalezienie położenia liczby niewymiernej na osi liczbowej bywa trudne a czasami niemożliwe. Dzięki modelowi osi liczbowej każdej liczba rzeczywistej odpowiada pewien punkt na osi liczbowej i odwrotnie, każdemu punktowi na osi liczbowej odpowiada pewna liczba rzeczywista.



Przedziały liczbowe

- Przedziałem liczbowym ograniczonym otwartym $(a; b)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $a < x < b$. Może to się wydawać dziwne, ale w przedziale otwartym nie istnieje ani liczba największa ani najmniejsza.

- Przedziałem liczbowym ograniczonym domkniętym $< a; b >$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $a \leqslant x \leqslant b$. W tym przedziale istnieje liczba największa b i liczba najmniejsza a.

- Przedziałem liczbowym nieograniczonym otwartym $(a; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x > a$.
- Przedziałem liczbowym nieograniczonym domkniętym $< a; +\infty)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x \geqslant a$.
- Przedziałem liczbowym nieograniczonym otwartym $(-\infty; a)$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x < a$.
- Przedziałem liczbowym nieograniczonym domkniętym $(-\infty; a >$ nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających nierówność postaci: $x \leqslant a$.
- Przedział nieograniczony $(-\infty; +\infty)$ jest tożsamy ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Oprócz powyższych przedziałów istnieją również przedziały otwarto-domknięte, których zdefiniowanie nie nastręcza trudności.

Wartość bezwzględna liczby (moduł)

Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej nieujemnej (modułem) jest ta sama liczba, a wartością bezwzględną liczby rzeczywistej ujemnej, jest liczba do niej przeciwna. Zapisujemy to tak:

$$| a |= \begin{cases} a & dla\ a \geqslant 0 \\ -a & dla\ a < 0 \end{cases}$$

Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej odpowiada odległość tej liczby od zera na osi liczbowej.
Równania i nierówności z wartością bezwzględną. Czasami wartość bezwzględna występuje w równaniach lub nierównościach. Jak sobie z nimi radzić pokazują poniższe przykłady.
Przykład 1: Rozwiązać równanie: $|x - 6| = 1$ Równanie rozwiążemy metodą „filozoficzną". Wartość bezwzględna jakiej liczby wynosi 1? Otóż są to liczby 1 i –1. Zatem pod znakiem wartości bezwzględnej po lewej stronie równania musi stać 1 lub –1. Skoro tak, to $x - 6 = 1$ lub $x - 6 = -1$. Zatem równanie ma dwa rozwiązania: $x_1 = 7$ i $x_2 = 5$.
Przykład 2: Rozwiązać nierówność $|x - 6| > 3$ Równanie rozwiążemy również metodą „filozoficzną". Jaka liczba ma wartość bezwzględną większą od 3? Otóż liczba większa od 3 lub mniejsza od –3. Zatem $x-6 > 3$ lub $x-6 < -3$. Czyli $x > 9$ lub $x < 3$. Zatem rozwiązaniem nierówności jest suma przedziałów $(-\infty; 3) \cup (9; +\infty)$.
Przykład 3: Rozwiązać nierówność $|x + 1| < 4$ Równanie rozwiążemy również metodą „filozoficzną". Jaka liczba ma wartość bezwzględną mniejszą od 4? Otóż liczba większa od -4 i zarazem mniejsza od 4. Zatem $x+1 > -4$ i $x+1 < 4$. Czyli $x > -5$ i $x < 3$. Zatem rozwiązaniem nierówności jest przedział $(-5; 3)$.

Błędy przybliżeń (względny i bezwzględny)

Błędy przybliżeń pokazują, w jakim stopniu zaokrąglona liczba jest przekłamana w stosunku do liczby pierwotnej. Wyróżniamy dwa rodzaje błędów przybliżeń; są to błąd bezwzględny i błąd względny.
Błąd bezwzględny Δ, to wartość bezwzględna z różnicy przybliżenia a_0 i danej liczby a. Wzór na błąd bezwzględny ma więc postać:

$$\Delta = |a - a_0|$$

Błąd względny δ pokazuje jaką częścią danej liczby jest wartość, o jaką zaniżyliśmy lub zawyżyliśmy liczbę. Wzór na błąd względny ma postać:

$$\delta = \frac{|a - a_0|}{a} = \frac{\Delta}{a}$$

Oczywiście na dokładność przybliżenia danej liczby związana wskazuje błąd względny.

Równania i nierówności pierwszego stopnia z 1 niewiadomą

Równaniem z jedną niewiadomą x, nazywamy równanie postaci: $f(x) = 0$ gdzie $f(x)$ jest wyrażeniem algebraicznym, w którym występuje zmienna x oraz liczby. Dziedzina równania, to zbiór wszystkich liczb, dla których wyrażenie $f(x)$ ma sens liczbowy. Rozwiązaniem równania nazywamy każdą liczbę, która podstawiona za x czyni tą równość prawdziwą.
Przykłady równań z jedną niewiadomą:

1. $3x - 9 = 0$ (rozwiązaniem jest $x = 3$)
2. $x^2 - 4 = 0$ (rozwiązaniami są $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$)
3. $\frac{x+1}{x-2} + 2 = 0$ (rozwiązaniem jest $x = 1$)

Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi i $a \neq 0$.
Równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x, nazywamy równanie postaci:
$ax + b = 0$ i każde, które da się do tej postaci sprowadzić. Rozwiązaniem tego równania jest $x = -\frac{b}{a}$.
Nierównością pierwszego stopnia z jedną niewiadomą x, nazywamy nierówność postaci:
$ax + b > 0$ lub $ax + b < 0$ lub $ax + b \geqslant 0$ lub $ax + b \leqslant 0$ i każdą, którą da się do tej postaci sprowadzić. Rozwiązaniem tych nierówności są odpowiednio przedziały $(-\frac{b}{a}; +\infty)$, $(-\infty; -\frac{b}{a})$, $< -\frac{b}{a}; +\infty)$, $(-\infty; -\frac{b}{a} >$.

Proporcje

Iloraz dwóch wartości a i b nazywamy ich stosunkiem, co zapisujemy ułamkiem $\frac{a}{b}$. Jeżeli stosunki liczb a i b oraz c i d są równe ($\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$), to mówimy że liczby a, b, c, d tworzą proporcję. Liczby a i d nazywamy wyrazami skrajnymi, zaś b i c wyrazami środkowymi proporcji. Łatwo zauważyć, że w proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych ($a \times d = b \times c$).

Procenty i punkty procentowe

Często w życiu codziennym spotykamy się z pojęciem procentu. Podaje się na przykład o ile procent zdrożała żywność czy staniały telewizory, a także jaki procent powierzchni ziemi zajmują lądy czy jaki procent lądów zajmują lasy tropikalne.
Określenie: 1 procent (%) to po prostu ułamek $\frac{1}{100}$. A zatem:

$$1\% = \frac{1}{100}, 15\% = \frac{15}{100}, 53\% = \frac{53}{100}, 100\% = \frac{100}{100}$$

Ot i cała tajemnica. Aby obliczyć dany procent z jakiejś liczby należy po prostu pomnożyć ułamek odpowiadający danemu procentowi przez tę liczbę. Natomiast aby zamienić dany ułamek na procenty należy pomnożyć go przez 100, a wynik opatrzyć znakiem %.
Przykład 1: Cena towaru wzrosła o 6 zł, co stanowi 20% jego wartości. Ile obecnie kosztuje ten towar? Tym razem musimy wprowadzić niewiadomą x; jest to cena przed podwyżką.

$$20\% \times x = 6 \Longleftrightarrow \frac{1}{5}x = 6 \Longleftrightarrow x = 30,\ 30 + 6 = 36$$

Odp.: Towar kosztuje obecnie 36 zł.
Przykład 2: Towar kosztował 64 zł, a po obniżce ceny kosztuje 56 zł. O ile procent obniżono cenę?

$$\frac{64 - 56}{64} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = (\frac{1}{8} \times 100)\% = 12.5\%$$

Przykład 3: Towar kosztował 1500 zł. Zrobiono promocję i obniżono jego cenę o 6%. Ile kosztuje teraz?

$$1500 - 6\% \times 1500 = 1500 - \frac{6}{100} \times 1500 = 1500 - 90 = 1410\blacksquare$$

Odp.: Kosztuje 1200 zł.
Przykład 4: Towar po 30% obniżce kosztuje 910 zł. Ile kosztował przed obniżką? Układamy równanie: 70, czyli $\frac{70}{100} \times x = 910$, zatem $x = 1300$.
Odp.: Kosztował 1300 zł.
Przykład 5: Towar kosztował 1000 zł, zaś po obniżce jego cena wynosi 750 zł. O ile procent została obniżona cena? Jasne jest, że cenę obniżono o 250 zł. Musimy zatem ustalić jaki to procent ceny wyjściowej czyli zamienić ułamek 250/1000 na procent.

$$\frac{250}{1000} = \frac{25}{100} = 25\%\blacksquare$$

Odp.: Cenę obniżono o 25%.
Przykład 6: Zmieszano 1000 g wody z 250 g soli. Ilu procentowy roztwór soli otrzymano?
Mamy 1250 g mieszaniny, z czego 250 g to sól. Zatem:

$$\frac{250}{1250} = \frac{1}{5} = (\frac{1}{5} \times 100)\% = 20\%\blacksquare$$

Odp.: Otrzymano roztwór o stężeniu 20%.
Punkt procentowy.
Punkt procentowy jest to różnica między dwiema wartościami podanymi w procentach. I tak, jeśli zarabiasz aktualnie 5 tys. zł, a szef mówi Ci, że jak będziesz dobrze pracował to dostaniesz 10 proc. podwyżki, a jak świetnie to 20%, to różnica pomiędzy 20% i 10% wynosi $20 - 10 = 10$ punktów procentowych. Gdyby jednak zapytać o ile procent jest większa druga podwyżka od pierwszej odpowiedź byłaby 100%, bowiem $20\% - 10\% = 10\%$, $\frac{10\%}{10\%} = 1 = 100\%\blacksquare$.