CIĄGI LICZBOWE

CIĄG SKOŃCZONY I NIESKOŃCZONY

Ciągiem skończonym nazywamy funkcję określoną na skończonym zbiorze początkowych liczb naturalnych o wartościach rzeczywistych.

Ciągiem nieskończonym nazywamy funkcję określoną na całym zbiorze liczb naturalnych o wartościach rzeczywistych. W obu przypadkach wartości te nazywamy wyrazami ciągu..

Ciąg oznaczamy (a_n), gdzie a_n oznacza n-ty wyraz ciągu.

Przykłady ciągów:

$(1, 2, 3, 3, 2, 1)$; ciąg skończony składający się z 6 wyrazów.

$(1, 1, 1, \dots)$; ciąg nieskończony złożony z identycznych liczb czyli ciąg stały (tu same jedynki)

$(1, 2, 3, \dots)$; ciąg tożsamościowy (wyrazami są kolejne liczby naturalne).

$\left(1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots\right)$; ciąg harmoniczny (wyrazami są odwrotności kolejnych liczb naturalnych)

$(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13 \dots)$; ciąg Fibonacciego (zaczyna się od dwóch jedynek, każdy kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich).

$(1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32 \dots)$; ciąg geometryczny

CIĄGI MONOTONICZNE I OGRANICZONE

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>rosnącym</u> wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n, zachodzi nierówność: $a_{n+1} > a_n$, (przykład – ciąg $(1, 2, 3, \dots)$)

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>malejącym</u> gdy dla każdej liczby naturalnej n, zachodzi nierówność $a_{n+1} > a_n$ (przykład – ciąg harmoniczny $\left(1,\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots\right)$)

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>nierosnącym</u> wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n, zachodzi nierówność $a_{n+1} \leq a_n$

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>niemalejącym</u> wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n, zachodzi nierówność $a_{n+1} \geq a_n$

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>ograniczonym z góry</u> wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba M, od której są mniejsze lub równe wszystkie wyrazy ciągu. Na przykład ograniczony z góry jest ciąg harmoniczny. Wystarczy obrać $M = 1$. Ciag liczbowy (a_n) nazywamy <u>ograniczonym z dołu</u> wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba m, od której są większe lub równe wszystkie wyrazy ciągu. Na przykład ograniczony z dołu jest ciąg tożsamościowy $(1, 2, 3, \dots)$. Wystarczy obrać $m = 0$.

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>ograniczonym</u> (z góry i z dołu) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą obydwa powyższe warunki. Ciąg $(1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1 \dots)$ jest ograniczony (z góry i z dołu). Wystarczy obrać $M = 1$, zaś $m = -1$.

CIĄG ARYTMETYCZNY

Szczególnym przypadkiem ciągu jest ciąg arytmetyczny. Jest to ciąg, w którym różnica dwóch sąsiednich wyrazów jest stała. Stała ta nazywaną jest różnicą ciągu geometrycznego.

Definicja. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy <u>ciągiem arytmetycznym</u>, jeśli dla pewnej liczby r (różnicy ciągu) dla każdej liczby naturalnej zachodzi:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + r.}$$

Przykładem ciągu arytmetycznego jest ciąg tożsamościowy, (różnica sąsiednich wyrazów tego ciągu jest równa 1). Ciąg: $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ również jest arytmetyczny $(r = 2)$, natomiast ciąg: $(1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, \dots)$ już arytmetyczny nie jest (dlaczego?).

Aby obliczyć n-ty wyraz ciągu arytmetycznego, mając dane a_1 i r stosujemy wzór:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Każdy wyraz (oprócz pierwszego) ciągu arytmetycznego jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Ciąg arytmetyczny jest zawsze monotoniczny – rosnącym, gdy różnica ciągu jest dodatnia, malejącym, gdy ujemna, lub też stałym, gdy wynosi 0.

Sumę n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego obliczamy za pomocą wzoru:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

CIĄG GEOMETRYCZNY

Drugim ważnym ciągiem jest ciąg geometryczny. Jest to ciąg, w którym iloraz dwóch sąsiednich wyrazów jest stały. Stała ta nazywaną jest ilorazem ciągu geometrycznego.

Definicja. Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy ciągiem geometrycznym, jeśli dla pewnej liczby $q \neq 0$ (nazywanej ilorazem ciągu) dla każdej liczby naturalnej zachodzi: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Przykład: Ciąg: $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 2$.

Ciąg: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Również ciąg: $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = -1$.

Aby obliczyć n-ty wyraz ciągu geometrycznego, mając dane a_1 i q stosujemy wzór:

$$a_n = a_1 \cdot \boldsymbol{q^{n-1}}$$

Każdy wyraz ciągu geometrycznego, oprócz pierwszego jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Ciąg geometryczny o dodatnim ilorazie jest monotoniczny. Jeśli iloraz jest dodatni, ciąg geometryczny jest rosnący gdy $q > 1$, zaś malejący gdy $q < 1$.

Sumę n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego obliczamy za pomocą wzoru:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Jeżeli w ciągu geometrycznym $|q| < 1$, wówczas sumę wszystkich wyrazów tego ciągu obliczamy za pomocą wzoru:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$