FUNKCJA KWADRATOWA

Funkcję określoną wzorem:

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c} \text{ gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ i } a \neq 0$$

nazywamy funkcją kwadratową.

Prawą część równości $(ax^2 + bx + c)$ nazywamy trójmianem kwadratowym.

Funkcję kwadratową można zapisać w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (w tej ostatniej tylko wtedy gdy funkcja posiada miejsca zerowe).

POSTAĆ OGÓLNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Na podstawie postaci ogólnej funkcji kwadratowej możemy wyznaczyć punkt przecięcia paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej z osią OY. Jest to punkt o współrzędnych $(0, c)$.

POSTAĆ KANONICZNA FUNKCJI KWADRATOWEJ

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ (jest to tzw. Delta; inaczej wyróżnik trójmianu kwadratowego)

Postać kanoniczna umożliwia narysowanie wykresu funkcji (patrz niżej).

Ponieważ potrafimy narysować parabolę o danym współczynniku a, której wierzchołek ma współrzędne $(0, 0)$, umiemy też narysować parabolę, której wierzchołek ma współrzędne $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

POSTAĆ ILOCZYNOWA FUNKCJI KWADRATOWEJ

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Postać iloczynową posiada tylko funkcja kwadratowa, mająca miejsca zerowe (patrz niżej). Z postaci iloczynowej łatwo wyznaczyć współrzędne wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_w = f(x_w)$.

MIEJSCA ZEROWE FUNKCJI KWADRATOWEJ

Funkcja kwadratowa posiada 2 miejsca zerowe gdy $\Delta > 0$, wówczas:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}, \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

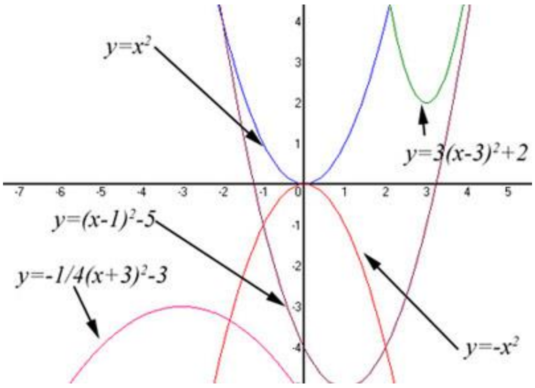
Funkcja kwadratowa posiada jedno (podwójne) miejsce zerowe gdy $\Delta = 0$, wówczas:

$$\boldsymbol{x_{1/2} = -\frac{b}{2a}},$$

Funkcja kwadratowa nie posiada miejsc zerowych gdy $\Delta < 0$

WYKRES FUNKCJI KWADRATOWEJ

Wykresem funkcji kwadratowej jest krzywa zwana parabolą. Współczynnik a decyduje o rozwartości paraboli. Czym większa jest $|a|$ tym parabola jest „smuklejsza”. W przypadku $a > 0$ ramiona paraboli są skierowane do góry, dla $a < 0$ skierowane w dół.



Kilka parabol – wykresów funkcji kwadatowych

DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Dziedziną funkcja kwadratowej jest $\mathbb{R}$. Zbiór wartości, jak widać z wykresu, to przedział $(y_w;\ +\infty)$ dla $a > 0$ lub przedział $(-\infty;\ y_w)$ dla $a < 0$, gdzie y_w to współrzędna igrekowa wierzchołka paraboli.

ZAMIANA POSTACI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Zamiana postaci kanonicznej na ogólną nie nastręcza kłopotów. Postać iloczynową (jeśli istnieje) uzyskujemy znajdując miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Zamianę postaci ogólnej na kanoniczną bez korzystania z wzorów, prześledzimy na przykładzie:

$$f(x) = x^2 - x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

WZORY VIETE'A

Jeśli liczby x_1 i x_1 są pierwiastkami równania kwadratowego:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

to między pierwiastkami zachodzą zależności, nazywane wzorami Viete'a:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$