# FUNKCJA LINIOWA, RÓWNANIA I UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

## PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA

**Proporcjonalnością prostą** nazywamy zależność między dwoma wielkościami zmiennymi $x$ i $y$, określoną wzorem:

$$\boldsymbol{y = a \cdot x}$$

Gdzie a jest liczbą różną od zera, zwaną <u>współczynnikiem proporcjonalności.</u>

Mówimy wówczas, że $y$ jest wprost proporcjonalne do $x$.

<u>Przykład 1</u>: w ruchu ze stałą prędkością przebyta droga jest wprost proporcjonalna do czasu.

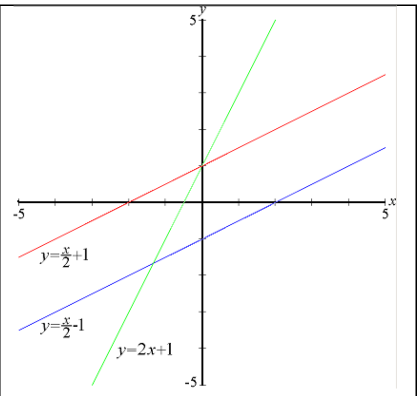
<u>Przykład 2</u>: wartość towaru zakupionego na wagę jest wprost proporcjonalna do jego wagi.

## FUNKCJA LINIOWA

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$ dla $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją liniową**. Wykresem funkcji liniowej jest prosta.

Liczbę $a$ nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej, liczbę $b$ wyrazem wolnym. Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta.

Czym większa wartość bezwzględna współczynnika kierunkowego, tym prosta jest bardziej stroma. Wykres funkcji liniowej staje się coraz bardziej poziomy gdy wartość bezwzględna współczynnika kierunkowego dąży do zera.




## DZIEDZINA I ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ

Dziedziną funkcji liniowej jest zawsze zbiór liczb rzeczywistych. Zbiorem wartości jest również zbiór liczb rzeczywistych za wyjątkiem funkcji stałej, dla której zbiór wartości jest jednoelementowy (zawiera tylko jedną liczbę – właśnie tą stałą).

## MONOTONICZNOŚĆ I RÓŻNOWARTOŚCIOWOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ

Za monotoniczność funkcji liniowej odpowiada współczynnik kierunkowy prostej. Gdy $a > 0$ wówczas funkcja jest rosnąca, gdy $a < 0$ funkcja jest malejąca. Dla $a = 0$ funkcja oczywiście jest stała. Z wyjątkiem funkcji stałej funkcja liniowa jest zawsze różnowartościowa.

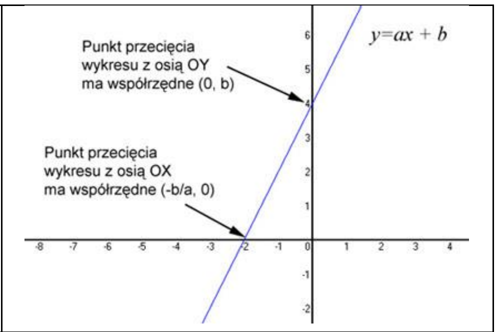
## MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI LINIOWEJ

Funkcja liniowa posiada na ogół jedno miejsce zerowe. Jest to odcięta punktu, w którym wykres funkcji przecina oś $OX$. Wyjątkiem jest funkcja stała, która nie posiada miejsca zerowego lub też posiada same miejsca zerowe ($f(x) \equiv 0$).

## WYKRES FUNKCJI LINIOWEJ

Każda prosta (oprócz prostej prostopadłej do osi $OX$) jest wykresem pewnej funkcji liniowej. Zależność współrzędnych punktów przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych od współczynników $a$ i $b$ pokazuje rysunek.

Wyraz wolny $b$ to rzędna punktu przecięcia prostej z osią $OY$.




Do sporządzenia wykresu funkcji liniowej (poprowadzenia prostej) wystarczą dwa punkty. Zatem jak znaleźć wzór funkcji liniowej przechodzącej przez punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$?

Aby to zrobić należy do wzoru ogólnego $f(x) = ax + b$ podstawić współrzędne punktu $A$, a następnie punktu $B$ i rozwiązać powstały układ równań z dwoma niewiadomymi $a$ i $b$. Oczywiście w przypadku gdy oba punkty leżą na prostej prostopadłej do osi $OX$ rozwiązania nie znajdziemy.

Przykład 1. Narysować wykres funkcji $y = 2x + 3$. Wyznaczamy współrzędne dwóch punktów, przez które przechodzi wykres funkcji. Na przykład, dla $x = 0$ $y = 3$, a dla $x = -1, y = 1$, zatem jeden z punktów, nazwijmy go $A$, ma współrzędne $(0, 3)$, zaś drugi B, ma współrzędne $(-1, 1)$. Znajdujemy punkty w układzie współrzędnych, prowadzimy przez nie prostą i wykres gotowy!

Przykład 2. Znaleźć wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $A(0, 3)$ i B $(-1, 1)$. Ponieważ punkty mają leżeć na wykresie, ich współrzędne muszą spełniać wzór ogólny funkcji liniowej $y = ax + b$. Podstawiając otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 1 = a \cdot (-1) + b \end{cases}$$

Rozwiązaniami powyższego układu są $a = 2, b = 3$, zatem szukany wzór funkcji to $y = f(x) = 2x + 3$

## RÓWNOLEGŁOŚĆ I PROSTOPADŁOŚĆ WYKRESÓW FUNKCJI LINIOWYCH

Dwa wykresy funkcji liniowych o równaniach:

$y = a_1 x + b_1$ i $y = a_2 x + b_2$

są równoległe, gdy $a_1 = a_2$, zaś prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$

## GRAFICZNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ Z 1 NIEWIADOMĄ

Dzięki poznanym wykresom funkcji liniowych można spojrzeć innym okiem na rozwiązywanie równań z 1 niewiadomą. Przypuśćmy, że mamy do rozwiązania równanie:

$$2x + 1 = x + 2$$

Jak łatwo obliczyć, rozwiązaniem równania jest $x = 1$. Ale zobaczmy, po lewej i po prawej stronie mamy wzory pewnych funkcji liniowych. Ich wykresy to proste, które nie są równoległe gdyż mają różne współczynniki kierunkowe. Proste nierównoległe mają punkt przecięcia, którego współrzędną $x$ właśnie wyliczyliśmy. Zatem rozwiązywanie równań (1 stopnia) z 1 niewiadomą to w interpretacji graficznej znajdowanie punktu przecięcia prostych! Jest jasne, że proste równoległe reprezentują równanie sprzeczne (bez rozwiązania), zaś proste pokrywające się reprezentują równanie nieoznaczone (posiadające nieskończenie wiele rozwiązań).

## FUNKCJA LINIOWA W ŻYCIU CODZIENNYM

Jakie zjawiska w życiu codziennym możemy opisać funkcją liniową? Na przykład droga przebyta przez samochód jadący ze stałą prędkością jest funkcją liniową czasu. Funkcję tę można przedstawić wzorem:

$\boldsymbol{S(t) = v \cdot t + x_0}$, gdzie $v$ - prędkość, $x_0$ - początkowy odcinek drogi, $t$ – czas.

Podobnie, objętość wody znajdującej się w zbiorniku w danej chwili jest funkcja liniową czasu, jeśli tylko uznamy, że kran doprowadzający wodę pracuje ze stałą wydajnością.

$$\boldsymbol{V(t) = w \cdot t + v_0}$$

gdzie $\boldsymbol{w}$ – wydajność kranu, $\boldsymbol{v_0}$ – objętość początkowa, $\boldsymbol{t}$ – czas

## RÓWNANIA PIERWSZEGO STOPNIA Z 2 NIEWIADOMYMI

**Równaniem pierwszego stopnia z 2 niewiadomymi** $x$ i $y$ nazywamy równanie postaci:

$$\boldsymbol{ax + by = c}\text{ , gdzie } a, b, c \in \mathbb{R}$$

gdzie $a$ i $b$ nazywamy współczynnikami równania i $a$ i $b$ nie są równocześnie zerami: $(a^2 + b^2) > 0$.

## WYKRES RÓWNANIA

**Wykresem równania** pierwszego stopnia z 2 niewiadomymi $x$ i $y$ nazywamy zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, y)$, takich że współrzędne te spełniają dane równanie. Wykresem jest linia prosta.

## UKŁADY RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA Z 2 NIEWIADOMYMI

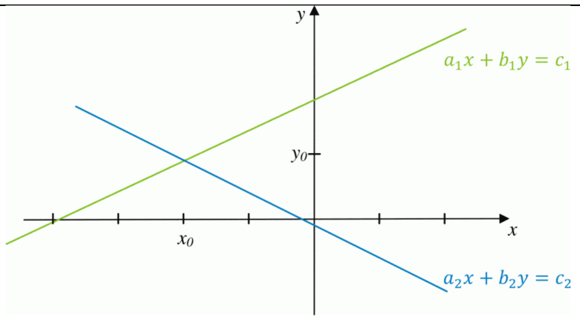
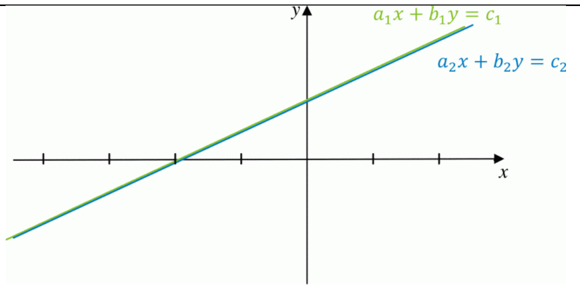
**Układem dwóch równań pierwszego stopnia z 2 niewiadomymi** $x$ i $y$ nazywamy układ postaci:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y = c_1} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y = c_2} \end{cases}$$

$$\text{gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \text{ i } a_2^2 + b_2^2 > 0$$

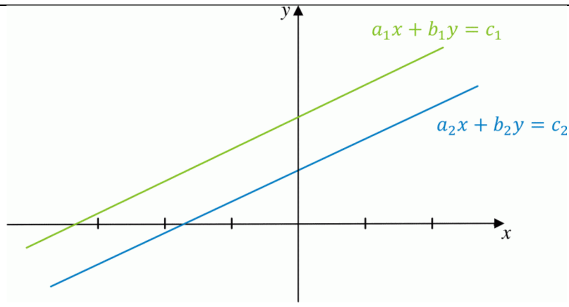
**Rozwiązaniem układu dwóch równań pierwszego stopnia z 2 niewiadomymi** $x$ i $y$ nazywamy każdą parę liczb $(x, y)$, która spełnia jednocześnie oba równania. Jeśli nie ma takiej pary wówczas zbiór rozwiązań układu jest pusty (innymi słowy układ nie ma rozwiązania).

Układ dwóch równań liniowych reprezentują dwie proste. W zależności od wzajemnego położenia tych prostych, układ nazywamy:

| | |
|---|---|
| **Oznaczonym,** jeśli proste przecinają się w jednym punkcie. Wówczas istnieje jedno rozwiązanie układu: para liczb będących współrzędnymi punktu przecięcia. |  |
| **Nieoznaczonym**, jeśli proste pokrywają się. Wówczas rozwiązaniem układu jest para współrzędnych każdego punktu należącego do tych prostych. Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. |  |

**Sprzecznym**, jeśli proste są równoległe.

Nie istnieje punkt należący do obydwu prostych, zatem nie istnieje para liczb spełniająca oba równania. Zbiór rozwiązań układu jest pusty (układ nie ma rozwiązania).




## METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW RÓWNAŃ

**Metoda podstawiania**

Polega na wyliczeniu jednej z niewiadomych ($x$ lub $y$) i podstawieniu jej do równania drugiego.

Przykład:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ \ \ x + 3y = 6 \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy:

$x = 6 - 3y$

Wstawiamy do pierwszego równania:

$-3(6 - 3y) + 2y = 4$

$-18 + 9y + 2y = 4$

$11y = 22$

$y = 2$

Wstawiamy $y = 2$ do $x = 6 - 3y$

Otrzymujemy:

$x = 0$

Rozwiązaniem układu równań jest zatem para liczb:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

**Metoda przeciwnych współczynników**

Polega na dodawaniu równań stronami, w sytuacji gdy przy tej samej niewiadomej w dwóch równaniach stoją przeciwne współczynniki.

Przykład:

$$\begin{cases} \ \ 2x - y = 3 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$$

mnożymy drugie równanie stronami przez 2 i otrzymujemy:

$$\begin{cases} \ \ \ 2x - y = 3 \\ -2x + 6y = 12 \end{cases}$$

dodajemy równania stronami:

$2x - y - 2x + 6y = 3 + 12$

$5y = 15$

$y = 3$

Wstawiamy otrzymaną wartość do pierwszego równania z wyjściowego układu równań:

$2x - 3 = 3$

$x = 3$

Rozwiązaniem układu równań jest zatem para liczb:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

**Metoda wyznaczników.** Polega ona na obliczeniu tak zwanych wyznaczników i zastosowaniu odpowiednich wzorów. Przypuśćmy, że mamy układ równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad \text{gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \text{ i } a_2^2 + b_2^2 > 0$$

Obliczamy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \; W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \; W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Jeśli $W \neq 0$ układ posiada 1 rozwiązanie: $\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$

Jeśli $W = 0, W_x = 0, W_x = 0$, układ jest nieoznaczony (posiada nieskończenie wiele rozwiązań).

Jeśli $W = 0$ , $W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$, układ jest sprzeczny (nie posiada rozwiązań).