
PLANIMETRIA CZYLI GEOMETRIA PŁASZCZYZNY CZ. 3

DEFINICJE

Czworokąt to wielokąt o 4 bokach i 4 kątach.

Przekątną czworokąta nazywamy odcinek łączący przeciwległe wierzchołki. **Wysokością** czworokąta nazywamy odcinek poprowadzony z jednego z wierzchołków czworokąta i opadający prostopadłe na przeciwległą podstawę (lub jej przedłużenie). Czworokąt posiada cztery wysokości. Czworokąt może być wypukły i wklęsły. Czworokąt jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego kąty wewnętrzne są kątami wypukłymi ($< 180^\circ$).

PODZIAŁ CZWOROKĄTÓW

Trapezoid

Jest to czworokąt nie mający ani jednej pary boków równoległych.

Trapez

Jest to czworokąt, który ma przynajmniej jedną parę boków równoległych. Boki równoległe w trapezie nazywamy podstawami, pozostałe nazywamy ramionami. Suma miar kątów leżących przy tym samym ramieniu trapezu jest równa 180° .

Trapez, którego kąty przy podstawie są równe, to trapez równoramienny. Wynika stąd, że równe są też jego ramiona. Także przekątne w takim trapezie są równe. Trapez równoramienny posiada oś symetrii będącą symetralną obydwu podstaw. Trapez, którego jedno ramię tworzy kąty proste z podstawami, nazywa się trapezem prostokątnym. W trapezie prostokątnym prostopadłe ramię jest jego wysokością.

Równoległobok

Równoległobok to szczególny przypadek trapezu; ma 2 pary boków równoległych. Ponieważ przeciwległe boki są do siebie równoległe, są też równe. Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy, punkt ich przecięcia nazywamy środkiem ciężkości równoległoboku. W równoległoboku przeciwległe kąty są równe, zaś suma dwóch sąsiednich kątów jest równa 180° . Przekątne dzielą równoległobok na 4 trójkąty o równych polach.

Romb

Romb to czworokąt, którego wszystkie boki są równe. Jest to szczególny przypadek równoległoboku. Przekątne zawierają się w dwusiecznych kątów i przecinają się pod kątem prostym. Punkt przecięcia przekątnych jest środkiem symetrii rombu.

Prostokąt

Prostokąt to czworokąt, którego wszystkie kąty są proste. Przekątne prostokąta są równe.

Kwadrat

Kwadrat to czworokąt, który ma wszystkie boki i kąty równe (a zarazem proste). Przekątne kwadratu przecinają się pod kątem prostym.

Deltoid

Deltoid to czworokąt posiadający dwie pary sąsiednich boków równych, w którym żadne dwa boki nie są wzajemnie równoległe. Inaczej to czworokąt, którego jedna z przekątnych leży na jego osi symetrii.

TWIERDZENIA O CZWOROKĄCIE

Twierdzenie

W dowolnym czworokącie środki boków są wierzchołkami równoległoboku.

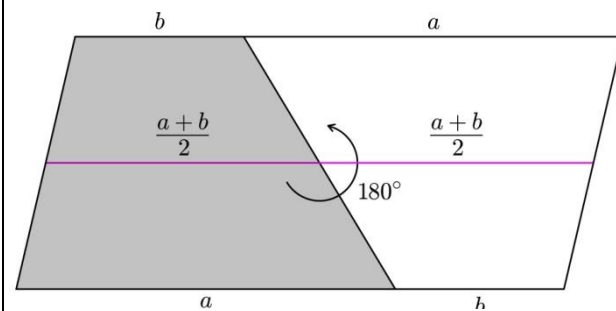
TWIERDZENIA O TRAPEZIE

Twierdzenie 1

W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym ramieniu wynosi 180° .

Twierdzenie 2

Odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw a jego długość równa jest średniej arytmetycznej długości podstaw. Dowód – patrz poniższy rysunek.



prostokątnym prostopadłe ramię jest jego wysokością.

TWIERDZENIA O RÓWNOLEGBOKU

Twierdzenie 1

Przekątne równoległoboku dzielą się na połowy

Twierdzenie 2

Pola wszystkich trójkątów utworzonych z poprowadzenia przekątnych równoległoboku są równe.

WIELOKĄT I WIELOKĄT FOREMNY

Wielokątem nazywamy część płaszczyzny ograniczoną łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną. **Wielokąt foremny** to wielokąt, który ma wszystkie kąty wewnętrzne równe i wszystkie boki równej długości

Twierdzenie 1

Suma s kątów dowolnego n -kąta obliczana jest ze wzoru:

$$s = (n - 2) \cdot 180^{\circ}$$

Twierdzenie 2

Liczba k przekątnych dowolnego n -kąta obliczana jest ze wzoru:

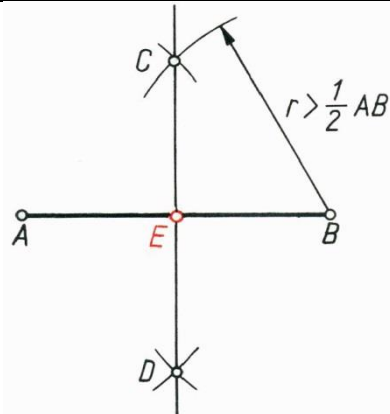
$$k = \frac{n(n - 3)}{2}$$

KONSTRUKCJE WIELOKĄTÓW FOREMNYCH

Zanim zabierzemy się za konstruowanie wielokątów foremnych, przypomnijmy 2 podstawowe konstrukcje geometryczne: symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta.

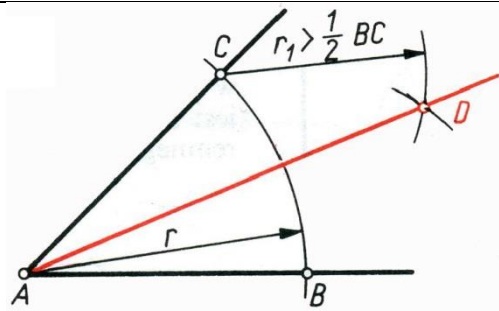
Symetralna odcinka

Z końców odcinka \overline{AB} kreślimy łuki o promieniu r przecinające się w punktach C i D . Punkty te wyznaczają symetralną odcinka \overline{AB} .



Dwusieczna kąta

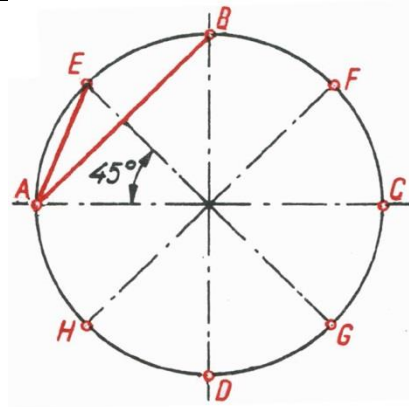
Z wierzchołka A kąta $\sphericalangle CAB$ kreślimy łuk o dowolnym promieniu r przecinający ramiona kąta w punktach B i C . Z tych punktów kreślimy łuki o promieniu r_1 przecinające się w punkcie D . Prosta przechodząca przez punkty A i D wyznacza dwusieczną $\sphericalangle CAB$.



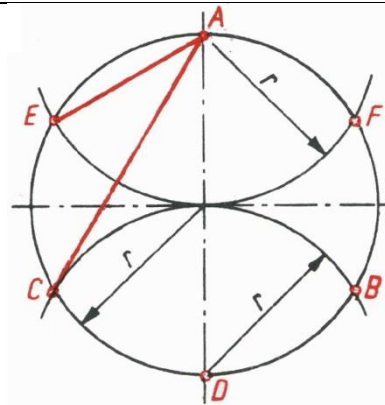
Ponieważ wszystkie wielokąty foremne dają się wpisać w okrąg, konstrukcje będą wykonywane przy pomocy danego okręgu.

Kwadrat (i ośmiokąt foremny)

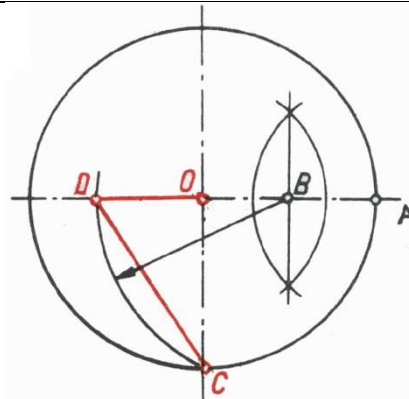
Wierzchołki kwadratu wyznaczają końce prostopadłych średnic AC i BD . Są to również 4 z 8 wierzchołków ośmiokąta foremnego. Dodatkowe wierzchołki ośmiokąta wyznaczają końce prostopadłych średnic EG i FH , poprowadzonych pod kątem 45° do narysowanych poprzednio.

**Trójkąt równoboczny i sześciokąt foremny**

Z punktu D średnicy AD okręgu o promieniu r , kreślimy łuk o promieniu r , przecinający okrąg w punktach B i C . Punkty A, B, C , są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Dodatkowe wierzchołki sześciokąta foremnego to punkty D oraz punkty E i F , przecięcia okręgu łukiem o promieniu r , wykreślonym z punktu A .

**Pięciokąt i dziesięciokąt foremny**

Kreślimy okrąg i dwie prostopadłe średnice. Znajdujemy środek B promienia OA okręgu i kreślimy z niego łuk o promieniu BC do przecięcia się ze średnicą w punkcie D . Odcinek CD jest bokiem pięciokąta foremnego, zaś OD bokiem dziesięciokąta foremnego.

**PODOBIEŃSTWO FIGUR PŁASKICH**

Podobieństwo to przekształcenie geometryczne zachowujące stosunek odległości punktów. Ów stosunek nazywamy skalą podobieństwa i oznaczamy k . Mówiąc przystępniej, podobieństwo zachowuje kształt figury, ale na ogół zmienia jej wielkość. Podobieństwo zachowuje też współliniowość punktów (proste przekształcane są na proste), ich uporządkowanie (punkty nie zamieniają się kolejnością) oraz kąty. Dwie figury geometryczne F_1 i F_2 nazywamy figurami podobnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podobieństwo, takie że obrazem figury F_1 jest figura F_2 .

PODOBIĘSTWO WIELOKĄTÓW

Dwa wielokąty są podobne jeśli ich kąty są odpowiednio równe, a zawarte między nimi boki proporcjonalne.

POLA FIGUR PODOBNYCH

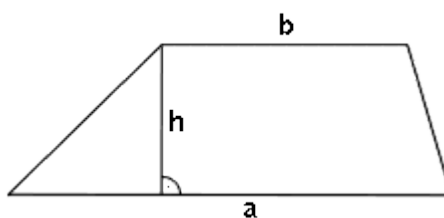
Jeżeli stosunek podobieństwa k dwóch figur płaskich wynosi k wówczas stosunek ich pól wynosi k^2 .

POLA CZWOROKĄTÓW

Pole trapezu jest połową iloczynu sumy podstaw i wysokości:

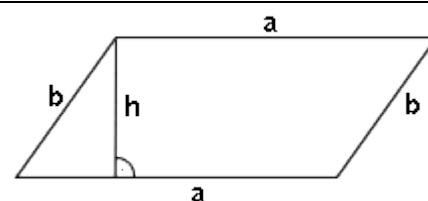
$$P = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$$

Inaczej: pole obliczamy mnożąc długość odcinka łączącego środki ramion przez jego wysokość.



Pole równoległoboku (dotyczy to także rombu, prostokąta i kwadratu) jest równe iloczynowi długości dowolnego boku i poprowadzonej na niego wysokości:

$$P = a \cdot h$$



Pole rombu jest połową iloczynu jego przekątnych:

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

