UŁAMKI ALGEBRAICZNE I WYRAŻENIA WYMIERNE

UŁAMEK ALGEBRAICZNY, DZIEDZINA, WARTOŚĆ

Ułamkiem algebraicznym jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci:

$$\frac{W(x)}{P(x)}$$

Gdzie $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym.
Dziedziną ułamka algebraicznego nazywamy zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $P(x) \neq 0$.

Na przykład dziedziną wyrażenia wymiernego: $\frac{x-3}{2x^2-4x}$ jest zbiór $\mathbb{R} - \{0,2\}$, ponieważ $0,2$ są miejscami zerowymi mianownika.

Wartością ułamka algebraicznego $\frac{W(x)}{P(x)}$ dla liczby a nazywamy liczbę $\frac{W(a)}{P(a)}$.

Na przykład wartością wyrażenia wymiernego $\frac{2x^2-1}{x+2}$ dla $x = 1$ jest liczba $\frac{1}{3}$.

SKRACANIE UŁAMKA ALGEBRAICZNEGO

Aby skrócić ułamek algebraiczny należy przedstawić obydwa wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ w postaci iloczynowej najniższego stopnia. Następnie określamy dziedzinę ułamka i dzielimy licznik i mianownik przez wspólny czynnik (jeśli jest).

Na przykład aby skrócić ułamek algebraiczny: $\frac{x^2-6x+9}{3x^2-27}$ należy rozłożyć na czynniki obydwa trójmiany kwadratowe znajdujące się w liczniku (kłania się delta) i mianowniku. Zatem $\frac{x^2-6x+9}{3x^2-27} = \frac{(x-3)^2}{3(x-3)(x+3)}$. Dziedziną tego ułamka jest $R—\{-3,3\}$. Teraz dzielimy licznik i mianownik przez wspólny czynnik $(x-3)$, wolno nam to zrobić bo dla każdej liczby z dziedziny $x - 3 \neq 0$. Otrzymujemy zatem skrócony ułamek $\frac{x-3}{3(x+3)}$.■

DODAWANIE I ODEJMOWANIE UŁAMKÓW ALGEBRAICZNYCH

Rezultatem dodawania i odejmowania ułamków algebraicznych jest również ułamek algebraiczny. Podobnie jak w przypadku zwykłych ułamków w pierwszej kolejności należy znaleźć wspólny mianownik, a następnie dodać lub odjąć liczniki.

Na przykład znajdźmy sumę: $\frac{2+x}{2-x} + \frac{x^2+4x}{x^2-4}$. Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika.

Zatem $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x^2+4x}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2+x^2+4x}{x^2-4} = \frac{2x^2+8x+4}{x^2-4}$. ■

MNOŻENIE UŁAMKÓW ALGEBRAICZNYCH

Rezultatem pomnożenia ułamków algebraicznych jest również ułamek algebraiczny. Podobnie jak w przypadku zwykłych ułamków mnożymy liczniki i mianowniki, a następnie skracamy otrzymany ułamek algebraiczny.

Na przykład pomnóżmy: $\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{2x-6}$. Mamy $\frac{2x\cdot(x+1)}{(x^2-1)\cdot(2x-6)}=\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x-6)}$. Ustalamy dziedzinę ($\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1,3\}$. Na końcu dzielimy licznik i mianownik przez wspólny czynnik $(x+1)$, wolno nam to zrobić ponieważ dla każdej liczby z dziedziny $x+1\neq 0$. Otrzymujemy ułamek: $\frac{2x}{(x-1)\cdot(2x-6)}$. ■

DZIELENIE UŁAMKÓW ALGEBRAICZNYCH

Rezultatem podzielenia ułamków algebraicznych jest również ułamek algebraiczny. Podobnie jak w przypadku zwykłych ułamków aby je podzielić, należy pierwszy ułamek pomnożyć przez odwrotność drugiego a następnie, jeśli jest to możliwe otrzymany ułamek algebraiczny skrócić.

Na przykład podzielmy: $\frac{2}{x-7}:\frac{4x}{x-7}$. Mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego: $\frac{2}{x-7}\cdot\frac{x-7}{4x}=\frac{2(x-7)}{4x(x-7)}$. Dzielimy licznik i mianownik przez $(x-7)$ i otrzymujemy ułamek: $\frac{2}{4x}$. ■

RÓWNANIA WYMIERNE

Równaniem wymiernym nazywamy równanie, które można przekształcić do postaci:

$$\frac{\mathrm{W(x)}}{\mathrm{P(x)}}=0$$

Gdzie W(x) i P(x) są wielomianami i P(x) nie jest wielomianem zerowym.

Widać, że rozwiązaniem równania wymiernego są miejsca zerowe licznika, które należą do dziedziny. Zatem rozwiązywanie równań wymiernych w sumie to nic innego jak poszukiwanie miejsc zerowych wielomianu (co nie zawsze jest proste).

Rozwiążemy równanie: $\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x+3}$. Dziedziną równania jest zbiór $\mathbb{R}-\{-3,2\}$. Przekształcamy równanie do postaci: $\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x+3}=0$. Sprowadzamy do wspólnego mianownika: $\frac{x+3-3(x-2)}{(x-2)(x+3)}=0$. Otrzymujemy $\frac{-2x+9}{(x-2)(x+3)}=0$, co daje $x=-\frac{9}{2}$. Otrzymany x należy do dziedziny równania, zatem jest rozwiązaniem równania. ■

WYKRES I WŁASNOŚCI FUNKCJI $f(x)=\frac{a}{x}$

Rozważmy funkcję $f(x)=\frac{a}{x}$, czyli tak zwana proporcjonalność odwrotna. Wykresem tej funkcji homograficznej jest hiperbola. Hiperbola jest krzywą o dwóch asymptotach (czyli prostych do których dąży wykres), w przypadku naszej funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ są nimi osie układu współrzędnych.

FUNKCJA HOMOGRAFICZNA

Funkcję wymierną postaci:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\ \text{gdzie ad}\neq\text{bc}$$

nazywamy funkcją homograficzną.

Najprostszym przypadkiem funkcji homograficznej jest proporcjonalność odwrotna $f(x)=\frac{1}{x}$, Wzór każdej funkcji homograficznej $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ można sprowadzić do postaci $f(x)=\frac{k}{x-p}+q$. Jest to tzw. <u>postać kanoniczna</u> funkcji homograficznej. Można wykazać, że $k=\frac{bc-ad}{c^2}$ $p=-\frac{d}{c}, q=\frac{a}{c}$. Wykresem każdej funkcji homograficznej jest <u>hiperbola</u>.