WIELOMIANY

OKREŚLENIE JEDNOMIANU STOPNIA N 1 ZMIENNEJ

Definicja 1. Jednomianem stopnia n jednej zmiennej x nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci:

$$\boldsymbol{ax^n}$$

Gdzie $a \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ (współczynnik jednomianu) oraz $n \in \mathbb{N}$ (stopień wielomianu).

Definicja 2. Jednomianem stopnia 0 nazywamy stałą różną od zera.

Definicja 3. Jednomianem zerowym nazywamy stałą równą zeru. Jednomian zerowy nie posiada stopnia.

OKREŚLENIE WIELOMIANU STOPNIA N 1 ZMIENNEJ

Definicja 4. Wielomianem jednej zmiennej x nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci:

$$\boldsymbol{W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

Liczbę naturalną n nazywamy **stopniem wielomianu** ($st\, W(x)$), a liczby rzeczywiste $a_0, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) współczynnikami wielomianu. My będziemy zajmować się tylko wielomianami o współczynnikach całkowitych.

Definicja 2. Wielomianem stopnia 0 nazywamy stałą różną od zera.

Definicja 3. Wielomianem zerowym nazywamy stałą równą zeru. Wielomian zerowy nie posiada stopnia.

Definicja 4. Jednomiany $a_n x^n$, $a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_1 x$, a_0 nazywamy wyrazami wielomianu przy czym a_0 nazywamy wyrazem wolnym.

Jednomiany podobne. Mówimy, że jednomiany (wyrazy) są podobne, jeśli różnią się tylko czynnikiem liczbowym. Podstawową operacją na jednomianach jest redukcja wyrazów podobnych.

WARTOŚĆ WIELOMIANU

Wartością wielomianu dla pewnej liczby p nazywamy liczbę $W(p)$, podstawiamy po prostu p za x.

PIERWIASTEK WIELOMIANU

Pierwiastek wielomianu to taka liczba x, taka że $W(x) = 0$. Każdy niezerowy wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków. Może mieć nie oznacza, że ma. Na przykład wielomian $x^{100} + 1$ nie ma żadnego pierwiastka.

Twierdzenie

Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

DZIAŁANIA NA WIELOMIANACH

Na wielomianach, podobnie jak na liczbach możemy przeprowadzać działania. Są to dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, a także znajdowanie największego wspólnego dzielnika.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE WIELOMIANÓW

Sumą lub różnicą dwóch wielomianów jest wielomian, którego współczynniki przy danej potędze x równe są odpowiednio sumie lub różnicy współczynników w wielomianach, które dodajemy.

Jeśli:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

to:

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0$$

Po prostu dodajemy współczynniki przy tych samych potęgach x i gotowe!

MNOŻENIE WIELOMIANÓW

Jeśli:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

to:

$$P(x) \cdot Q(x) = (a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0 b_n)x^n + (b_0 a_{n-1} + b_{n-1}a_0)x^{n-1} + \ldots + a_0 b_0$$

Mnożąc zatem dwa wielomiany mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego, a następnie redukujemy wyrazy podobne.

Oprócz powyższych działań wielomiany można jeszcze dzielić ale nie będziemy tym się zajmować.

ROZKŁAD WIELOMIANU NA CZYNNIKI

Rozkład wielomianu na czynniki polega na przedstawieniu go w postaci iloczynu wielomianów najniższych stopni. Każdy wielomian rzeczywisty można rozłożyć na czynniki będące wielomianami rzeczywistymi stopnia co najwyżej drugiego. Na ogół rozłożenie wielomianu nie jest łatwe. Rozkład wielomianu możemy przeprowadzić wyłączając wspólny czynnik przed nawias, grupując odpowiednio wyrazy, znajdując jego pierwiastki lub dodając i odejmując odpowiednie wyrazy czyli „sprytnym” sposobem

<u>Rozkład poprzez wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias i znalezienie pierwiastków:</u>

$x^3 - 3x^2 - 4x = x \cdot (x^2 - 3x - 4) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)$

<u>Rozkład poprzez grupowanie wyrazów:</u>

$x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x^3 - 5x^2) + (2x - 10)$
$= x^2 \cdot (x - 5) + 2(x - 5) = (x - 5) \cdot (x^2 + 2)$

$2x^3 - 8x^2 + x - 4 = (2x^3 - 8x^2) + (x - 4) =$
$= 2x^2 \cdot (x - 4) + (x - 4) = (x - 4) \cdot (2x^2 + 1)$

<u>Rozkład „sprytnym sposobem”.</u>

$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

TWIERDZENIE O PIERWIASTKACH WYMIERNYCH WIELOMIANU

Jeśli wielomian

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ma współczynniki całkowite, to jego pierwiastki wymierne postaci $\frac{p}{q}$, (jeśli takie istnieją) muszą spełniać warunek: p jest dzielnikiem a_0, zaś q jest dzielnikiem a_n.

Oczywiście wynika z tego, że pierwiastki całkowite wielomianu są dzielnikami wyrazu wolnego a_0.

<u>Przykład 1:</u> Jednym z 3 pierwiastków (podwójnym) wielomianu $4x^3 - 3x + 1$ jest liczba $\frac{1}{2}$; oczywiście 1 dzieli 1 a 2 dzieli 4.

Przykład 2: Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - x^2 - 4x + 4$ i dzielnikiem wyrazu wolnego 4.