FUNKCJA POTĘGOWA, WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

POTĘGA, DZIAŁANIA NA POTĘGACH - PRZYPOMNIENIE

Potęga o wykładniku naturalnym to po prostu pomnożenie przez siebie danej liczby tyle razy ile wynosi wykładnik. Zapisujemy to następująco:

$$\mathbf{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{\boldsymbol{n}}}$$

Liczbę a nazywamy podstawą potęgi a n jej wykładnikiem. $\mathrm{a}^1 = \mathrm{a}$. Jeśli $a \neq 0$, przyjmujemy $\mathrm{a}^0 = 1$.

Na przykład $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot\cdot 2 = 32$.

Na potęgach można wykonywać działania. I tak:	
$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$	Na przykład $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$	Na przykład $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
$\mathbf{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	Na przykład $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$
$\mathbf{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$	Na przykład $(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12} = 4096$

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym. Jeśli $a \neq 0$ i n jest liczbą naturalną to:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}}$$

Na przykład: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Na potęgach o wykładniku ujemnym obowiązują wszystkie podane wyżej działania.

Pierwiastek stopnia $\boldsymbol{n}$ z liczby. Jeżeli $\mathrm{a} > 0$ i $\mathrm{n} > 1$ to pierwiastkiem stopnia n z liczby a nazywamy taką liczbę b, że $\mathrm{b^n = a}$. Pierwiastek stopnia n z liczby a oznaczamy $\sqrt[n]{\mathrm{a}}$. Jeżeli $\mathrm{n} = 2$ to w zapisie pomijamy n i piszemy $\sqrt{\mathrm{a}}$.

<u>Na przykład:</u> $\sqrt{9} = 3$, bo $3^2 = 9$, $\sqrt[3]{8} = 2$, bo $2^3 = 8$, $\sqrt[4]{\frac{625}{1296}} = \frac{5}{6}$, bo $(\frac{5}{6})^4 = \frac{625}{1296}$

Potęga o wykładniku wymiernym. Jeżeli $\mathrm{a} > 0$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ to:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

<u>Na przykład:</u> $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

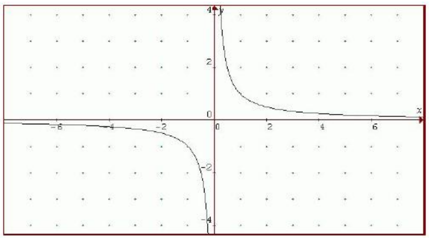
FUNKCJA POTĘGOWA

Funkcją potęgową nazywamy funkcję postaci: $f(x) = x^a$, gdzie a $\in \mathbb{R}$

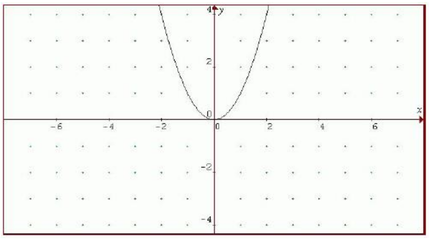
Dziedzina funkcji potęgowej zależy od wykładnika a.

1. Jeżeli $a \in N$ wówczas dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych ($D_f = R$).
2. Jeżeli $a \in Z$ wówczas $D_f = R - \{0\}$.
3. Jeżeli $a \in Q$ i $a > 0$, $D_f = R_+ \cup \{0\}$, zaś dla $a < 0$ $D_f = R_+$.

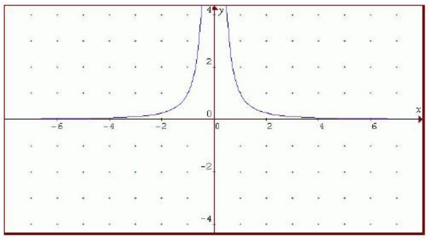
PRZYKŁADOWE WYKRESY FUNKCJI POTĘGOWEJ



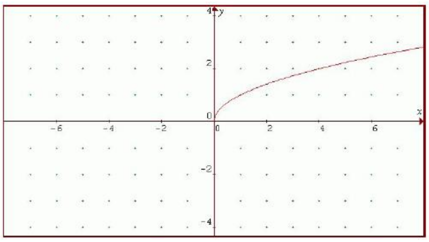
$y = x^{-1}$



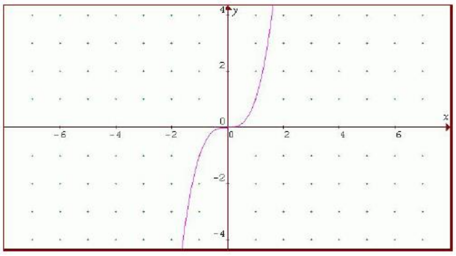
$y = x^{2}$



$y = x^{-2}$



$y = x^{\frac{1}{2}}$



$y = x^{3}$

RÓWNANIE POTĘGOWE

Z pojęciem funkcji potęgowej wiąże się pojęcie <u>równania potęgowego</u>.

W równaniu potęgowym po jednej stronie występuje pewna potęga x, a po drugiej liczba.

<u>Na przykład:</u>

$x^4 = 256$, rozwiązaniem równania są $x_1 = 4$ i $x_2 = -4$

$x^{\frac{3}{4}} = 5$, rozwiązaniem równania jest $x = \sqrt[4]{125}$

$\frac{1}{x^3} = -8$, rozwiązaniem równania jest $x = -\frac{1}{2}$

FUNKCJA WYKŁADNICZA

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci:

$\boldsymbol{f(x) = a^x}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$ $(a \neq 1)$

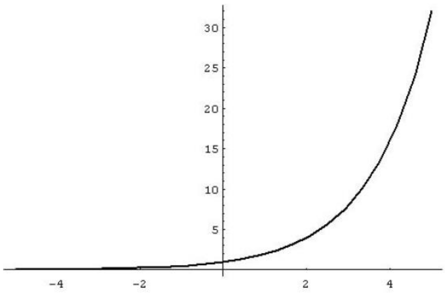
Dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Dlaczego $a \neq 1$? Otóż biorąc $a = 1$ otrzymalibyśmy po prostu funkcję stałą $f(x) = 1$ (1 podniesione do dowolnej potęgi daje 1).

Zbiorem wartości funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich (R_+). Dlatego że każda liczba dodatnia podniesiona do dowolnej potęgi jest liczbą dodatnią. Poniżej są wykresy funkcji wykładniczej dla $a > 1$ i $a < 1$.

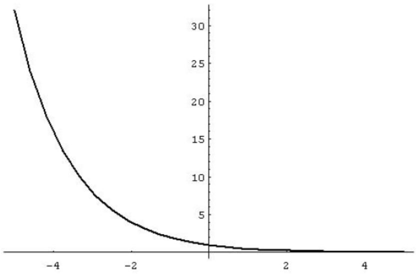
Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa. Wykres posiada punkt charakterystyczny $(0,1)$. Przez ten punkt przechodzi wykres każdej funkcji wykładniczej! Ponadto, dla każdego $a > 1$ funkcja jest rosnąca, zaś dla $a < 1$, funkcja jest malejąca.

Wykresy funkcji $y = a^x$, i $y = \frac{1}{a^x}$ są symetryczne względem osi OY. Oś OX jest asymptotą poziomą wykresu każdej funkcji wykładniczej (dlaczego?).

PRZYKŁADOWE WYKRESY FUNKCJI WYKŁADNICZYCH



$y = 2^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

RÓWNANIE WYKŁADNICZE

Jest to równanie, w którym niewiadoma x występuje tylko w wykładniku potęgi.

Na przykład:

$3^x = 3^{2x+1}$, rozwiązaniem jest $x = -1$

$2^{2x+1} = \sqrt[3]{2} \cdot 2^{x-1}$, rozwiązaniem jest $x = -\frac{5}{3}$

$2^{2x} + 2^x = 6$, rozwiązaniem jest $x = 1$

LOGARYTM Z LICZBY - PRZYPOMNIENIE

Logarytmem przy podstawie $a, (a \neq 1)$ z liczby dodatniej x nazywamy liczbę y, taką że $a^y = x$.
Fakt ten zapisujemy:

$$\boldsymbol{y = log a}.$$

WŁASNOŚCI LOGARYTMÓW:

$$\boldsymbol{log_a 1 = 0, \; log_a a = 1}$$

$$\boldsymbol{log_a m \cdot n = log_a m + log_a n,}$$

$$\boldsymbol{log_a \frac{m}{n} = log_a m - log_a n,}$$

$$\boldsymbol{log_a n^b = b \cdot log_a n}$$

$$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$$

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

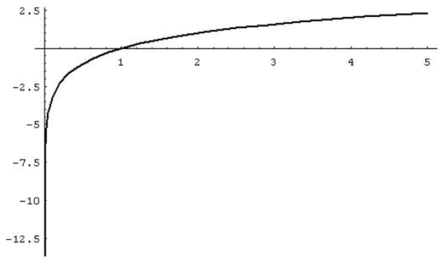
Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję postaci:

$$\boldsymbol{f(x) = log_a x}, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}_+ \; (a \neq 1).$$

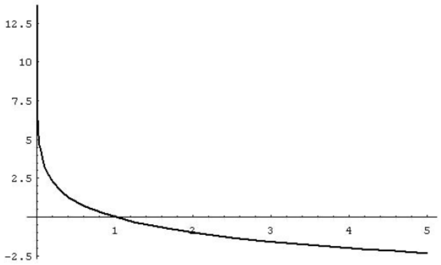
Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

Zbiorem wartości funkcji logarytmicznej jest zbiór liczb rzeczywistych.

PRZYKŁADOWE WYKRESY FUNKCJI LOGARYTMICZNEJ



$y = log_2 x$



$y = log_{\frac{1}{2}} x$

RÓWNANIE LOGARYTMICZNE

Jest to równanie, w którym niewiadoma x występuje tylko pod znakiem logarytmu.

Na przykład:

$log_2 2x = log_2(3 - x)$, rozwiązaniem jest x $= 1$

$log_2(x - 1) = 3$, rozwiązaniem jest x $= 9$

$log_3(x^2 + 5) = 2$, rozwiązaniami są jest $x_1 = 2$, $x_2 = -2$