Geometria analityczna

O geometrii analitycznej

Geometria analityczna to dział geometrii zajmujący się badaniem własności figur geometrycznych metodami analitycznymi i algebraicznymi. Zamiast rozważać geometryczne aspekty figur rozwiązujemy układów równań, które opisują dane figury. Geometria analityczna bada przestrzeń euklidesową (w naszym przypadku dwuwymiarową) i własności jej podzbiorów. Zdefiniujmy podstawowe pojęcia geometrii analitycznej.

Prostokątny układ współrzędnych

Przez dowolny punkt (nazwiemy go punktem O) na płaszczyźnie poprowadźmy dwie wzajemnie prostopadłe osie liczbowe. Układ takich osi nazywamy układem współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie. Punkt przecięcia O osi nazywamy początkiem **układu współrzędnych**, a osie nazywamy **osiami współrzędnych**. Oś poziomą OX nazywamy osią odciętych, oś pionową OY nazywamy osią rzędnych. Inną nazwą jest układ kartezjański (od Kartezjusza, prekursora geometrii analitycznej. Osie dzielą płaszczyznę na cztery części zwane ćwiartkami, które numerujemy jak na rysunku.

Współrzędne punktu na płaszczyźnie

Każdemu punktowi P na płaszczyźnie możemy przyporządkować jednoznacznie parę liczb (x, y), które nazywamy współrzędnymi. Aby określić współrzędne punktu na płaszczyźnie znajdujemy rzuty prostopadłe punktu P odpowiednio na osie OX i OY i odczytujemy liczby x i y, które tym rzutom odpowiadają. Para (x, y) jest parą uporządkowaną, jako pierwszą wyróżniamy oś OX, a jako drugą oś OY. Przyporządkowanie między punktami płaszczyzny i parami liczb (x, y) jest wzajemnie jednoznaczne, to znaczy każdemu punktowi odpowiada określona para liczb i odwrotnie. Punkt P mający współrzędne x i y zapisujemy $P = (x, y)$. Wektor w układzie współrzędnych Niech w układzie współrzędnych będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$. Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z nich nazywamy początkiem wektora, drugi zaś końcem wektora. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. Liczby $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ nazywamy współrzędnymi wektora. Tak określony wektor zapisujemy w nawiasie kwadratowym. $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$ Często wektory oznaczamy jedną małą literą, np. $\overrightarrow{u}$ wówczas $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$, gdzie u_x, u_y współrzędne wektora $\overrightarrow{u}$. Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego początkiem i końcem jest ten sam punkt.Wektor zerowy ma obie współrzędne równe zeru. Długość wektora to po prostu długość odcinka $\overline{AB}$. Obliczamy ją ze wzoru:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

lub

$$\overrightarrow{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y{}^2}$$

Dwa wektory są równe jeżeli mają równe współrzędne. Dwa wektory są przeciwne jeżeli ich współrzędne są liczbami przeciwnymi.

Wyznaczanie środka odcinka Współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka $\overline{AB}$; $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, wyznaczamy ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Prosta, równanie kierunkowe, równanie ogólne

Pojęcie linii prostej jest intuicyjnie jasne, w klasycznej geometrii euklidesowej prosta jest pojęciem pierwotnym, czyli takim, którego się nie definiuje. Można ją jednak interpretować za pomocą pojęć wykraczających poza geometrię, np. jako zbiór punktów spełniających pewne równanie. W geometrii analitycznej prostą określamy jako zbiór punktów spełniających pewne równanie liniowe. Równanie to można zapisać w różnej postaci.

Równanie kierunkowe prostej. Jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY, to równanie prostej można zapisać w tak zwanej postaci kierunkowej $y = ax+b$, gdzie a i b to liczby rzeczywiste. Liczbę a nazywany jest współczynnikiem kierunkowym prostej, ponieważ od niego zależy kąt nachylenia prostej do osi OX. Liczbę b, nazywany wyrazem wolnym, jest to rzędna punktu, w którym prosta przecina oś OY.

Równanie ogólne prostej. W prostokątnym układzie współrzędnych weźmy punkt $P = (x_1, y_1)$ i niezerowy wektor $\overrightarrow{v} = [A, B]$. Istnieje jedna i tylko jedna prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do wektora $\overrightarrow{v} = [A, B]$ określona równaniem:

$$Ax + By + C = 0$$

Równoległość i prostopadłość prostych

Dwie proste k, l o równaniach kierunkowych $k : y = a_1x + b_1$ i $l : y = a_2x + b_2$ są równoległe, gdy: $a_1 = a_2$ zaś prostopadłe, gdy: $a_1a_2 = -1$

Dwie proste k, l o równaniach ogólnych $k : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $l : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe, gdy: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ zaś prostopadłe, gdy: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej k o równaniu ogólnym $k : Ax + By + C = 0$, dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$