

# Geometria analityczna

## O geometrii analitycznej

Geometria analityczna to dział geometrii zajmujący się badaniem własności figur geometrycznych metodami analitycznymi i algebraicznymi. Zamiast rozważać geometryczne aspekty figur rozwiązujemy układy równań, które opisują dane figury. Geometria analityczna bada przestrzeń euklidesową (w naszym przypadku dwuwymiarową) i własności jej podzbiorów. Zdefiniujemy podstawowe pojęcia geometrii analitycznej.

## Prostokątny układ współrzędnych

Przez dowolny punkt (nazwiemy go punktem  $O$ ) na płaszczyźnie poprowadźmy dwie wzajemnie prostopadłe osie liczbowe. Układ takich osi nazywamy układem współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie. Punkt przecięcia  $O$  osi nazywamy początkiem **układu współrzędnych**, a osie nazywamy **osiami współrzędnych**. Oś poziomą  $OX$  nazywamy osią odciętych, oś pionową  $OY$  nazywamy osią rzędnych. Inną nazwą jest układ kartezjański (od Kartezjusza, prekursora geometrii analitycznej). Osie dzielą płaszczyznę na cztery części zwane ćwiartkami, które numerujemy jak na rysunku.

## Współrzędne punktu na płaszczyźnie

Każdemu punktowi  $P$  na płaszczyźnie możemy przyporządkować jednoznacznie parę liczb  $(x, y)$ , które nazywamy współrzędnymi. Aby określić współrzędne punktu na płaszczyźnie znajdujemy rzuty prostopadłe punktu  $P$  odpowiednio na osie  $OX$  i  $OY$  i odczytujemy liczby  $x$  i  $y$ , które tym rzutom odpowiadają. Para  $(x, y)$  jest parą uporządkowaną, jako pierwszą wyróżniamy oś  $OX$ , a jako drugą oś  $OY$ . Przyporządkowanie między punktami płaszczyzny i parami liczb  $(x, y)$  jest wzajemnie jednoznaczne, to znaczy każdemu punktowi odpowiada określona para liczb i odwrotnie. Punkt  $P$  mający współrzędne  $x$  i  $y$  zapisujemy  $P = (x, y)$ . Wektor w układzie współrzędnych Niech w układzie współrzędnych będą dane dwa punkty  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$ . Wektorem nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z nich nazywamy początkiem wektora, drugi zaś końcem wektora. Wektor o początku  $A$  i końcu  $B$  oznaczamy  $\overrightarrow{AB}$ . Liczby  $x_2 - x_1$  i  $y_2 - y_1$  nazywamy współrzędnymi wektora. Tak określony wektor zapisujemy w nawiasie kwadratowym.  $\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$  Często wektory oznaczamy jedną małą literą, np.  $\vec{u}$  wówczas  $\vec{u} = [u_x, u_y]$ , gdzie  $u_x, u_y$  współrzędne wektora  $\vec{u}$ . Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego początkiem i końcem jest ten sam punkt. Wektor zerowy ma obie współrzędne równe zero. Długość wektora to po prostu długość odcinka  $\overline{AB}$ . Obliczamy ją ze wzoru:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

lub

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Dwa wektory są równe jeżeli mają równe współrzędne. Dwa wektory są przeciwne jeżeli ich współrzędne są liczbami przeciwnymi.

**Wyznaczanie środka odcinka** Współrzędne punktu  $S$  będącego środkiem odcinka  $\overline{AB}$ ;  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ , wyznaczamy ze wzoru:

$$S = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

## Prosta, równanie kierunkowe, równanie ogólne

Pojęcie linii prostej jest intuicyjnie jasne, w klasycznej geometrii euklidesowej prosta jest pojęciem pierwotnym, czyli takim, którego się nie definiuje. Można ją jednak interpretować za pomocą pojęć wykraczających poza geometrię, np. jako zbiór punktów spełniających pewne równanie. W geometrii analitycznej prostą określamy jako zbiór punktów spełniających pewne równanie liniowe. Równanie to można zapisać w różnej postaci.

**Równanie kierunkowe prostej.** Jeśli prosta nie jest równoległa do osi  $OY$ , to równanie prostej można zapisać w tak zwanej postaci kierunkowej  $y = ax + b$ , gdzie  $a$  i  $b$  to liczby rzeczywiste. Liczbę  $a$  nazywany jest współczynnikiem kierunkowym prostej, ponieważ od niego zależy kąt nachylenia prostej do osi  $OX$ . Liczbę  $b$ , nazywany wyrazem wolnym, jest to rzędna punktu, w którym prosta przecina oś  $OY$ .

**Równanie ogólne prostej.** W prostokątnym układzie współrzędnych weźmy punkt  $P = (x_1, y_1)$  i niezerowy wektor  $\vec{v} = [A, B]$ . Istnieje jedna i tylko jedna prosta przechodząca przez punkt  $P$  i prostopadła do wektora  $\vec{v} = [A, B]$  określona równaniem:

$$Ax + By + C = 0$$

### **Równoległość i prostopadłość prostych**

Dwie proste  $k, l$  o równaniach kierunkowych  $k : y = a_1x + b_1$  i  $l : y = a_2x + b_2$  są równoległe, gdy:  $a_1 = a_2$  zaś prostopadłe, gdy:  $a_1a_2 = -1$

Dwie proste  $k, l$  o równaniach ogólnych  $k : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  i  $l : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  są równoległe, gdy:  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$  zaś prostopadłe, gdy:  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

### **Odległość punktu od prostej**

Odległość punktu  $P(x_0, y_0)$  od prostej  $k$  o równaniu ogólnym  $k : Ax + By + C = 0$ , dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$