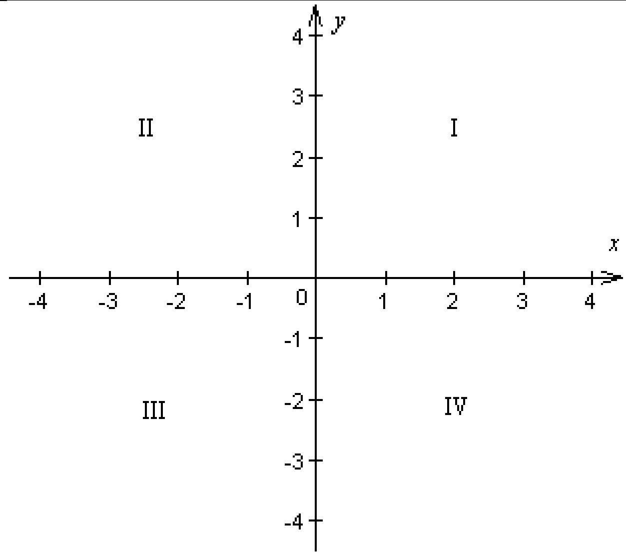
GEOMETRIA ANALITYCZNA

O GEOMETRII ANALITYCZNEJ

Geometria analityczna to dział geometrii zajmujący się badaniem własności figur geometrycznych metodami analitycznymi i algebraicznymi. Zamiast rozważać geometryczne aspekty figur rozwiązujemy układów równań, które opisują dane figury. Geometria analityczna bada przestrzeń euklidesową (w naszym przypadku dwuwymiarową) i własności jej podzbiorów. Zdefiniujmy podstawowe pojęcia geometrii analitycznej.

PROSTOKĄTNY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Przez dowolny punkt (nazwiemy go punktem O) na płaszczyźnie poprowadźmy dwie wzajemnie prostopadłe osie liczbowe. Układ takich osi nazywamy **układem współrzędnych prostokątnych** na płaszczyźnie. Punkt przecięcia O osi nazywamy **początkiem układu współrzędnych**, a osie nazywamy **osiami współrzędnych**. Oś poziomą OX nazywamy **osią odciętych**, oś pionową OY nazywamy **osią rzędnych**. Inną nazwą jest układ kartezjański (od Kartezjusza, prekursora geometrii analitycznej. Osie dzielą płaszczyznę na cztery części zwane ćwiartkami, które numerujemy jak na rysunku.



WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU NA PŁASZCZYŹNIE

Każdemu punktowi P na płaszczyźnie możemy przyporządkować jednoznacznie parę liczb (x, y), które nazywamy **współrzędnymi**. Aby określić współrzędne punktu na płaszczyźnie znajdujemy rzuty prostopadłe punktu P odpowiednio na osie OX i OY i odczytujemy liczby x i y, które tym rzutom odpowiadają. Para (x, y) jest parą uporządkowaną, jako pierwszą wyróżniamy oś OX, a jako drugą oś OY. Przyporządkowanie między punktami płaszczyzny i parami liczb (x, y) jest wzajemnie jednoznaczne. Punkt P mający współrzędne x i y zapisujemy $P = (x, y)$.

WEKTOR W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Niech w układzie współrzędnych będą dane dwa punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$. **Wektorem** nazywamy uporządkowaną parę punktów. Pierwszy z nich nazywamy początkiem wektora, drugi zaś końcem wektora. Wektor o początku A i końcu B oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. Liczby $x_2 - x_1$ i $y_2 - y_1$ nazywamy współrzędnymi wektora. Tak określony wektor zapisujemy w nawiasie kwadratowym.

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1\ ]$$

Często wektory oznaczamy jedną małą literą, np. $\vec{u}$

wówczas $\vec{u} = [u_x, u_y\ ]$, gdzie u_x, u_y współrzędne wektora $\vec{u}$.

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego początkiem i końcem jest ten sam punkt.Wektor zerowy ma obie współrzędne równe zeru.

Wartość wektora to po prostu długość odcinka AB. Obliczamy ją ze wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ lub } \vec{u} = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2}$$

Dwa wektory są **równe** jeżeli mają równe współrzędne.

Dwa wektory są **przeciwne** jeżeli ich współrzędne są liczbami przeciwnymi.

Wyznaczanie środka odcinka

Współrzędne punktu S będącego środkiem odcinka AB; $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$, wyznaczamy ze wzoru:

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Prosta, Równanie kierunkowe, Równanie ogólne

Pojęcie linii prostej jest intuicyjnie jasne, w klasycznej geometrii euklidesowej, prosta jest pojęciem pierwotnym, czyli takim, którego się nie definiuje. Można ją jednak interpretować za pomocą pojęć wykraczających poza geometrię, np. jako zbiór punktów spełniających pewne równanie. W geometrii analitycznej prostą określamy jako zbiór punktów spełniających pewne równanie liniowe. Równanie to można zapisać w różnej postaci.

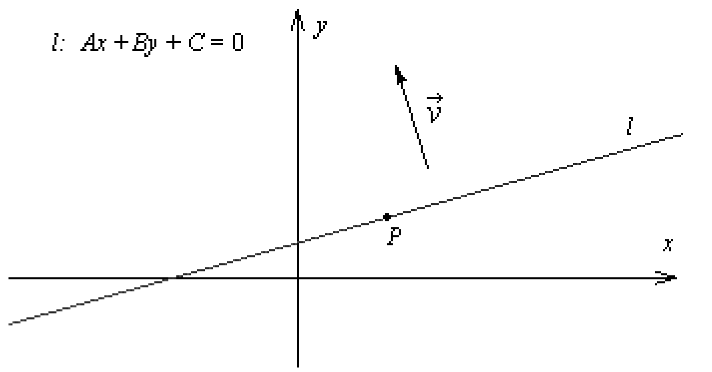
Równanie kierunkowe prostej

Jeśli prosta nie jest równoległa do osi OY, to równanie prostej można zapisać w tak zwanej postaci kierunkowej $y = ax + b$, gdzie a i b to liczby rzeczywiste. Liczbę a nazywany jest współczynnikiem kierunkowym prostej, ponieważ od niego zależy kąt nachylenia prostej do osi OX. Liczbę b, nazywany wyrazem wolnym, jest to rzędna punktu, w którym prosta przecina oś OY.

Równanie ogólne prostej

W prostokątnym układzie współrzędnych weźmy punkt $P = (x_1, y_1)$ i niezerowy wektor $\vec{v} = [A, B]$. Istnieje jedna i tylko jedna prosta l przechodząca przez punkt P i prostopadła do wektora $\vec{v}$, określona równaniem:

$$Ax + By + C = 0.$$



Równoległość i prostopadłość prostych

Dwie proste k, l o równaniach kierunkowych

$k: y = a_1 x + b_1$ i l: $k: y = a_2 x + b_2$

są równoległe, gdy:

$$a_1 = a_2$$

zaś prostopadłe, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Dwie proste k, l o równaniach ogólnych

$k: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ i $l: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

są równoległe, gdy:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$$

zaś prostopadłe, gdy:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Odległość punktu od prostej

Odległość punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej k o równaniu ogólnym: $Ax + By + C = 0$, dana jest wzorem:

$$d(P, k) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$