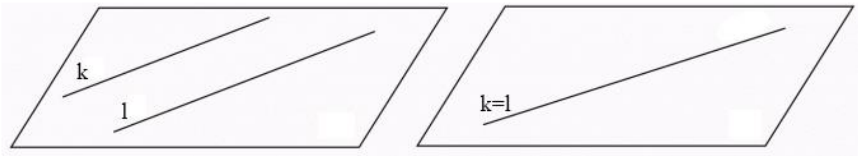
GEOMETRIA PRZESTRZENNA (STEREOMETRIA)

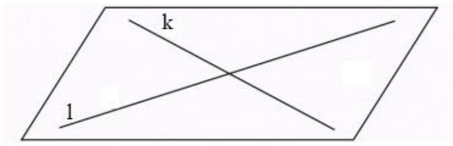
WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH W PRZESTRZENI

Stereometria jest działem geometrii, którego przedmiotem badań są bryły przestrzenne oraz ich właściwości. Na początek omówimy sobie wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

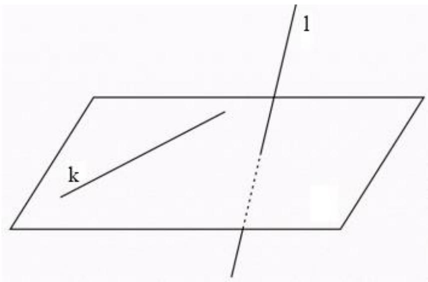
Dwie proste w przestrzeni są równoległe, jeśli zawierają się w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się. 2 proste są skośne, jeśli nie istnieje płaszczyzna zawierająca obie proste. Proste k i l są prostopadłe w przestrzeni gdy prosta k jest prostopadła do prostej k', równoległej do l i przecinającej k.



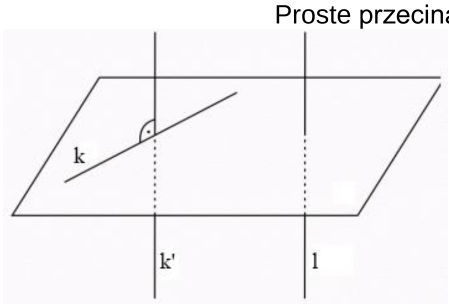
Proste równoległe



Proste przecinające się



Proste skośne



Proste prostopadłe $k \perp k'$, $k \perp l$

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

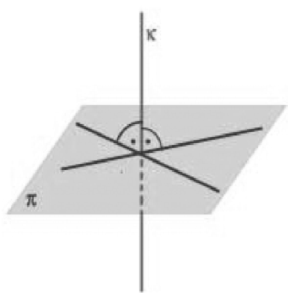
Prosta jest równoległa do płaszczyzny, jeżeli nie ma z nią punktów wspólnych lub leży na niej. Jeżeli prosta nie jest równoległa do płaszczyzny, wówczas prosta przecina płaszczyznę w punkcie. Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.

KĄT POMIĘDZY PROSTĄ I PŁASZCZYZNĄ

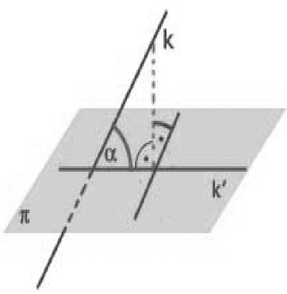
Jeśli prosta nie jest ani równoległa ani prostopadła do płaszczyzny, to kątem nachylenia prostej do płaszczyzny nazywamy kąt ostry pomiędzy prostą i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę.

TWIERDZENIE O 3 PROSTYCH PROSTOPADŁYCH

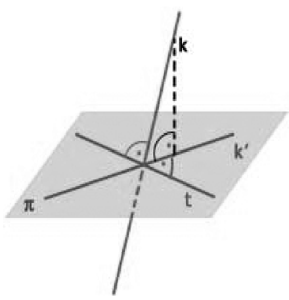
Niech k będzie prostą, która nie jest równoległa i nie jest prostopadła do płaszczyzny, a t prostą zawierającą się w płaszczyźnie i przechodzącą przez punkt wspólny prostej k i płaszczyzny. Prosta t jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy t jest prostopadła do rzutu k' prostej k na płaszczyznę.



Prosta prostopadła do płaszczyzny



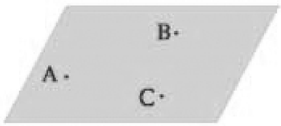
Kąt pomiędzy prostą i płaszczyzną



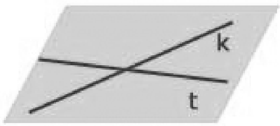
Prosta leżąca na płaszczyźnie prostopadła do prostej przecinającej płaszczyznę

PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

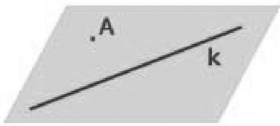
Płaszczyznę w przestrzeni jednoznacznie wyznaczają:



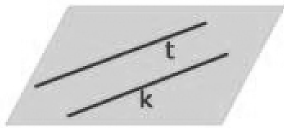
3 niewspółliniowe punkty



2 przecinające się proste



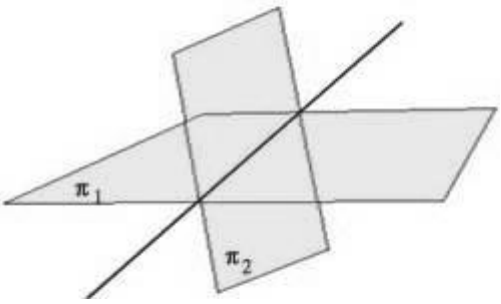
Prosta i punkt poza nią



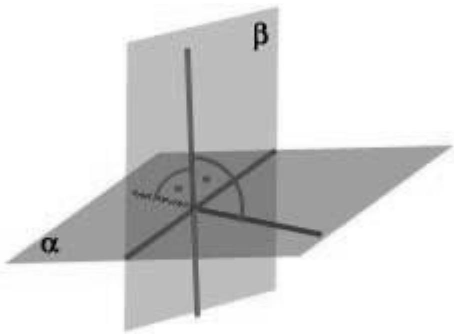
2 różne proste równoległe

Płaszczyzny nazywamy **równoległymi**, jeżeli nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się. Płaszczyzny, które nie są równoległe przecinają się. Częścią wspólną dwóch przecinających się płaszczyzn jest prosta.

Dwie płaszczyzny nazywamy **prostopadłymi**, jeżeli istnieje taka prosta, która zawiera się w jednej z tych płaszczyzn i jest prostopadła do drugiej płaszczyzny.



Płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej



Płaszczyzny prostopadłe

KĄT DWUŚCIENNY, KĄT LINIOWY

Kątem dwuściennym nazywamy zbiór złożony z dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednej z dwóch figur wyciętych z przestrzeni przez sumę tych półpłaszczyzn.

Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy kąt płaski otrzymany w wyniku przecięcia kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi. Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę jego kąta liniowego.

RZUT RÓWNOLEGŁY

Jeżeli mamy w przestreni daną płaszczyznę zwaną **rzutnią** i prostą k, która przecina płaszczyznę π i której kierunek nazywamy **kierunkiem rzutowania**, wówczas **rzutem równoległym** na **płaszczyznę** dowolnego punktu A nazywamy punkt A' przecięcia prostej równoległej do prostej k z płaszczyzną π.

WŁAŚCIWOŚCI RZUTU RÓWNOLEGŁEGO

Twierdzenie 1 Rzut równoległy nie zachowuje odległości punktów (nie jest izometrą).

Twierdzenie 2 Rzutem równoległym odcinka równoległego do rzutni jest odcinek równy i równoległy do danego.

Twierdzenie 3 Rzut równoległy zachowuje uporządkowanie punktów na prostej nierównoległej do kierunku rzutowania.

Twierdzenie 4 Rzut równoległy zachowuje stosunki odcinków na prostej nierównoległej do kierunku rzutowania.

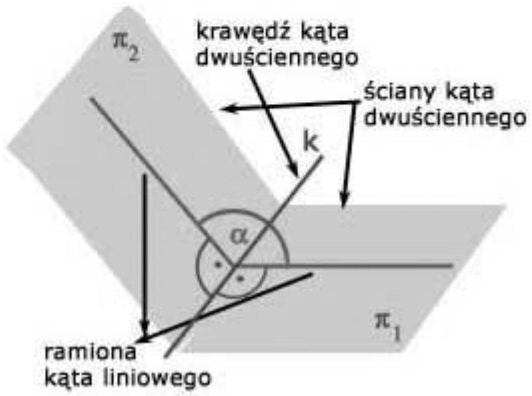
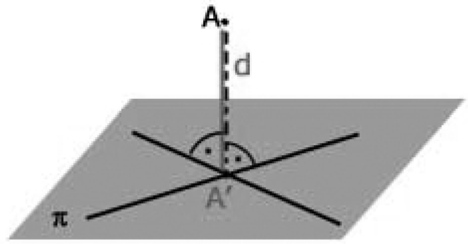
Twierdzenie 5 Rzut równoległy zachowuje równoległość i stosunki odcinków do siebie równoległych (ale nierównoległych do kierunku rzutowania).

Rzut prostokątny

Rzut prostokątny jest szczególnym przypadkiem rzutu równoległego na prostą, w którym kierunek rzutowania jest prostopadły do rzutni.

Odległość punktu od płaszczyzny

Odległość punktu od płaszczyzny jest równa odległości punktu od rzutu prostokątnego na płaszczyznę.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

A' - rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę.

$d = |AA'|$ - odległość punktu A od płaszczyzny.</td>
</tr>
<tr>
<td>Kąt dwuścienny</td>
<td>Odległość punktu od płaszczyzny</td>
</tr>
</table>

Figury przestrzenne (bryły) ograniczone i nieograniczone

Figurę nazywamy przestrzenną (bryłą), jeżeli nie zawiera się w żadnej płaszczyźnie. Figurę w przestrzeni nazywamy ograniczoną, jeżeli zawiera się w pewnej kuli. Figurę w przestrzeni nazywamy nieograniczoną, jeżeli nie zawiera się w żadnej kuli.

Wielościan

Bryłę nazywamy wielościanem, jeżeli jej brzeg jest sumą skończonej liczby wielokątów, zwanych ścianami wielościanu, przy czym:

Jeśli dwa wielokąty zawierają się w jednej płaszczyźnie, to mają co najwyżej jeden punkt wspólny,

Każde dwa punkty brzegowe bryły można połączyć łamaną zawartą w jej brzegu.

Boki ścian wielościanu nazywamy krawędziami, a wierzchołki ścian - wierzchołkami wielościanu.

Twierdzenie Eulera

Jeśli wielościan wypukły ma w wierzchołków, k krawędzi i s ścian, to

$$w - k + s = 2$$

Graniastosłup

Graniastosłupem nazywamy wielościan, którego dwie ściany, zwana podstawami, są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami, których wszystkie wierzchołki są jednocześnie wierzchołkami podstaw.

Graniastosłupy dzielimy na:

- proste – krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw
- pochyłe –krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw
- prawidłowe – o podstawach będących wielokątami foremnymi
- równoległościany – podstawą jest równoległobok, a przeciwległe ściany są równoległe
- prostopadłościany – wszystkie ściany są prostokątami
- sześciany – wszystkie ściany są kwadratami

Wysokość graniastosłupa jest to odległość między podstawami.

Przekątna graniastosłupa jest to odcinek łączący dwa wierzchołki nie leżące na jednej ścianie.

OSTROSŁUP

Ostrosłupem nazywamy wielościan, którego podstawa jest dowolnym wielokątem, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku S, który nazywamy wierzchołkiem ostrosłupa. **Wysokość** ostrosłupa to odległość wierzchołka od podstawy.Ostrosłupy dzielimy na:

- proste – na podstawie których można opisać okrąg, a punkt w którym wysokość styka się z podstawą, jest jednocześnie środkiem tego okręgu
- czworościany – o podstawie trójkąta
- prawidłowe –krawędzie boczne są równej długości a podstawą jest wielokąt foremny

KĄTY W GRANIASTOSŁUPACH I OSTROSŁUPACH

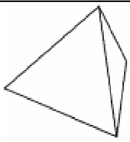
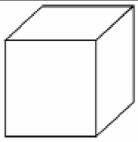
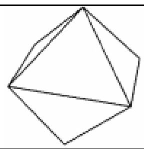
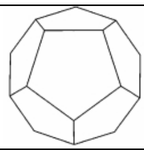
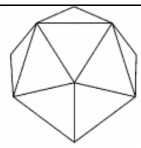
Kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy to kąt pomiędzy prostą prostopadłą do krawędzi podstawy, leżącą w płaszczyźnie tej ściany i podstawą.

Kąt nachylenia krawędzi ściany bocznej do podstawy to kąt pomiędzy tą krawędzią i podstawą.

Kąt nachylenia ścian bocznych to kąt pomiędzy płaszczyznami tych ścian.

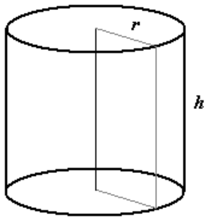
WIELOŚCIAN FOREMNY

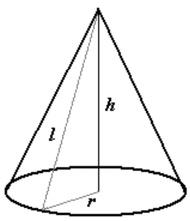
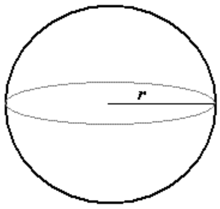
Wielościanem foremnym (bryłą platońską) nazywamy wielościan wypukły, którego ściany są przystającymi wielokątami foremnymi. Od czasów Platona wiadomo, że istnieje dokładnie 5 wielościanów foremnych:

				
czworościan	sześcian	ośmiościan	dwunastościan	dwudziestościan

BRYŁY OBROTOWE

Są to bryły ograniczone powierzchnią powstałą z obrotu figury płaskiej dookoła prostej (osi obrotu). Najważniejsze bryły obrotowe to:

Walec Jest to bryła powstała w wyniku obrotu prostokąta wokół jednej z krawędzi 	Pole powierzchni bocznej walca: $$P_b = 2\pi \cdot r \cdot h$$ Pole powierzchni całkowitej walca: $$P_c = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$$ Objętość walca: $$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$ r – promień podstawy, h – wysokość walca

Stożek Jest to bryła powstała w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół przyprostokątnej  	Pole powierzchni bocznej stożka: $$P_b = \pi \cdot r \cdot l$$ Pole powierzchni całkowitej stożka: $$P_c = \pi \cdot r \cdot (r + l)$$ Objętość stożka: $$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$ r – promień podstawy stożka h – wysokość stożka l – tworząca stożka
Kula Jest to bryła powstała w wyniku obrotu koła wokół jego średnicy  	Pole powierzchni kuli (sfery): $$P = 4\pi \cdot r^2$$ Objętość kuli: $$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$ r – promień kuli