PODSTAWOWE POJĘCIA

Kombinatoryka zajmuje się wyznaczaniem liczby elementów zbiorów skończonych utworzonych zgodnie z określonymi zasadami. Rachunek prawdopodobieństwa to dział matematyki zajmujący się tzw. doświadczeniami losowymi. Są to doświadczenia, w których nie da się dokładnie przewidzieć wyniku. Wynikiem takiego doświadczenia jest zajście tzw. zdarzenia losowego. Statystyka zajmuje się metodami tzw. wnioskowania statystycznego, które polegają na tym, że na podstawie wyników uzyskanych z próby formułujemy wnioski o całej zbiorowości.

REGUŁA MNOŻENIA

Jeżeli wybór polega na podjęciu kolejno k decyzji, przy czym pierwszą można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_1 sposobów, wreszcie k-tą na n_k sposobów, to wyboru można dokonać na $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ sposobów.

Przykład 1. Rzucamy 10 razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia? W każdym rzucie mamy 2 możliwości (orzeł lub reszka), rzutów jest 10, zatem możliwych wyników jest $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10} = 2^{10} = 1024$.

Przykład 2. W restauracji jest x zup, y drugich dań, z deserów i t rodzajów napojów. Ile jest wszystkich możliwych sposobu zamówienia 3-daniowego obiadu? Zupę możemy wybrać na x sposobów, do każdej zupy na y sposobów można wziąć drugie danie, do każdego z tych zestawów na z sposobów można zamówić deser i na końcu do każdego z zamówień można dobrać na t sposobów napój. Zatem możliwych zamówień jest $x \cdot y \cdot z \cdot t$.

Przykład 3. Pięć osób: Abacki, Babacki, Cabacki, Dabacki i Ebacki kupiło bilety do kina. Na ile sposobów mogą zająć pięć ustalonych miejsc w rzędzie? Abacki może usiąść na 5 sposobów, bo wszystkie miejsca są wolne, Babacki ma 4 możliwości, bo 1 miejsce zajął Abacki, Cabackiemu pozostają 3, Dabackiemu 2, w końcu Ebacki musi usiąść na ostatnim wolnym miejscu. Zatem liczba możliwości wynosi: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

REGUŁA DODAWANIA

Jeżeli wybór polega na podjęciu jednej z k decyzji, przy czym pierwszą można podjąć na n_1 sposobów, drugą na n_1 sposobów, wreszcie k-tą na n_k sposobów, to wyboru można dokonać na $\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 + \cdots + \mathrm{n}_\mathrm{k}$ sposobów.

Przykład 1. Na ile sposobów można założyć jednokolorowy garnitur wybierając spośród 6 różnych marynarek (4 szarych i 2 czarnych) oraz 7 różnych par spodni (3 szarych i 4 czarnych)? Zacznijmy od garnituru szarego. Do każdych z 4 szarych marynarek można założyć 2 pary szarych spodni. Daje to $4 \cdot 3 = 12$ możliwości. Teraz garnitur czarny. Do każdych z 2 czarnych marynarek można założyć 4 pary szarych spodni. Daje to $4 \cdot 2 = 8$ możliwości. Daje to w sumie $12 + 8 = 20$ możliwości.

Przykład 2. Z cyfr $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ tworzymy liczby czterocyfrowe o różnych cyfrach. Ile wśród nich jest liczb podzielnych przez 5? Liczba jest podzielna przez 5 jeżeli ma na końcu 0 lub 5. Zacznijmy od liczb mających 0 na końcu (na pozycji jedności). Cyfrę tysięcy można wybrać na 6 sposobów, cyfrę setek na 5 sposobów, zaś cyfrę dziesiątek na 4 sposoby. Daje to $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sposobów. Teraz liczby z 5 na końcu. Cyfrę tysięcy można wybrać na 5 sposobów (odpada 0), cyfrę setek na 5 sposobów, zaś cyfrę dziesiątek na 4 sposoby. Daje to $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ sposobów. Zatem odpowiedź brzmi $120 + 100 = 220$ sposobów.

DOŚWIADCZENIE LOSOWE

Doświadczeniem losowym nazywamy takie doświadczenie, które może być powtarzane dowolnie wiele razy w warunkach identycznych i którego wynik nie daje sie przewidzieć jednoznacznie.

ZDARZENIE LOSOWE

Zdarzeniem losowym nazywamy pewien zbiór możliwych wyników danego doświadczenia losowego. Niech doświadczeniem losowym będzie rzut kostką do gry. Wynikiem tego doświadczenia będzie pewne zdarzenie losowe, na przykład wyrzucenie parzystej liczby oczek, wyrzucenie szóstki etc. Niech doświadczeniem losowym będzie losowanie jednej karty z talii. Zdarzeniem losowym może być wylosowanie kiera, wylosowanie blotki etc.

ZDARZENIE ELEMENTARNE

Najprostszy wynik doświadczenia losowego nazywać będziemy **zdarzeniem elementarnym**. W rzucie kostką mamy oczywiście 6 zdarzeń elementarnych ponieważ może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Przy losowaniu karty z talii liczba zdarzeń elementarnych wynosi 52, zaś w rzucie monetą tylko 2 (orzeł, reszka). Zdarzenia elementarne (gdy jest ich na przykład k oznaczamy $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego oznaczamy Ω.

ZDARZENIE, ZDARZENIE PEWNE, ZDARZENIE NIEMOŻLIWE

Zdarzeniem będziemy nazywać każdy podzbiór zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych. I tak na przykład w przypadku jednokrotnego rzutu kostką zbiór zdarzeń elementarnych ma 6 elementów: „wypadła 1-ka", „wypadła 2-ka", „wypadła 3-ka". „wypadła 4-ka", „wypadła 5-ka" i „wypadła 6-ka". Gdy określimy zdarzenie A w rzucie kostką jako „wypadła parzysta liczby oczek", wówczas $A = \{2, 4, 6\}$, zaś zdarzenie B jako „wypadła liczba >3", wówczas $B = \{4, 5, 6\}$ itd. Zdarzenie elementarne, które należy do zbioru reprezentowanego przez zdarzenie nazywamy zdarzeniem sprzyjającym danemu zdarzeniu. I tak zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A to „wypadła 2-ka", „wypadła 4-ka", „wypadła 6-ka", zdarzenia sprzyjające zdarzeniu B to „wypadła 4-ka", „wypadła 5-ka", „wypadła 6-ka".

Zdarzenie nazywamy **zdarzeniem pewnym** jeśli zbiór zdarzeń sprzyjających jest równy Ω.

Zdarzenie nazywamy **zdarzeniem niemożliwym** jeśli zbiór zdarzeń sprzyjających jest pusty. Na przykład jeśli dla rzutu kostką określimy zdarzenie A jako „wypadła liczba oczek <7", wówczas będzie to zdarzenie pewne. Jeśli zaś określimy zdarzenie B jako „wypadła liczba oczek >6" wówczas będzie to zdarzenie niemożliwe.

DZIAŁANIA NA ZDARZENIACH

Ponieważ zdarzenia są po prostu zbiorami możemy na nich wykonywać działania. I tak:

$A \cup B$	Suma zdarzeń to zdarzenie polegające na tym, że zajdzie zdarzenie A lub zajdzie zdarzenie B.
$A \cap B$	Iloczyn zdarzeń to zdarzenie polegające na tym, że zajdzie zdarzenie A i zajdzie zdarzenie B.
$A \setminus B$	Różnica zdarzeń to zdarzenie polegające na tym, że zajdzie zdarzenie A i nie zajdzie zdarzenie B.
$A \cap B = \emptyset$	Zdarzenia A i B są rozłączne (wykluczają się).
$A \cap A' = \emptyset$	Zdarzenia A i A' są przeciwstawne.
$A \subset B$	Zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B.

POJĘCIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Jeżeli Ω składa sie z n jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych, to prawdopodobieństwo zdarzenia A składającego sie z k zdarzeń elementarnych wyraża sie wzorem:

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, $A,\ B \subset \Omega$ a P prawdopodobieństwem określonym na tym zbiorze. Wówczas:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. jeżeli $A \subset B$ to $P(A) \leq P(B)$
3. dla każdego $A \subset \Omega$ zachodzi nierówność $P(A) \leq 1$
4. $P(A) + P(A') = 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots A_n \subset \Omega$ wykluczają się parami, to:
   $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

ELEMENTY STATYSTYKI MATEMATYCZNEJ

Średnia arytmetyczna n liczb (próby), to po prostu suma tych liczb podzielona przez n. Średnia arytmetyczna wyraża się wzorem:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Średnia arytmetyczna ważona liczb $x_1, x_2, \ldots, x_k$ z których każda określona ma przypisaną nieujemną wagę $w_1, w_2, \ldots, w_k$ wyraża się wzorem:

$$\overline{x_w} = \frac{x_1 \cdot w_1 + \cdots + x_n \cdot w_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

Mediana. Uporządkujmy w ciąg n liczb w kolejności rosnącej. Medianą n liczb będziemy nazywali liczbę dzielącą ów ciąg na dwie części zawierające tyle samo liczb. W przypadku gdy n jest parzyste mediana będzie średnią arytmetyczną dwóch liczb środkowych.

Przykład: medianą liczb $2, 4, 5, 8, 10$ jest oczywiście 5, ale medianą liczb $3, 5, 10, 12$ jest 7.5.

Dominanta. Dominanta to wartość występująca w próbie najczęściej. Oczywiście w zbiorze n liczb może być więcej niż jedna dominanta – jeśli każda z tych liczb jest inna, dominantą jest każda z nich!

Wariancję w^2 liczb $x_1, x_2, \ldots, x_k$ o wartości średniej $\bar{x}$ obliczamy ze wzoru:

$$w^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

Odchylenie standardowe oznacza średnie odchylenie od średniej arytmetycznej. Odchylenie standardowe to po prostu pierwiastek z wariancji:

$$\sigma = \sqrt{w^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$