

Trygonometria

1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 12 i 5. Wyznacz funkcje trygonometryczne kąta α leżącego przy dłuższej przyprostokątnej.
2. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 12, a wysokość na nią opuszczona ma długość 4. Jakie są wartości funkcji trygonometrycznych kąta leżącego przy podstawie?
3. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 6 i 8. Wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta β jaki tworzy wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka prostego z krótszą przyprostokątną.
4. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 12, a kosinus jednego z kątów ostrych wynosi $\frac{1}{3}$. Oblicz długości przyprostokątnych.
5. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 9, a kąt ostry ma miarę 60° . Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

6. Wyraź w mierze łukowej kąty:

- (a) 20°
- (b) 45°
- (c) 105°
- (d) 150°
- (e) 210°
- (f) 330°

7. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

- (a) $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$
- (b) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$
- (c) $(1 - \cos \alpha)\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right)$
- (d) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$
- (e) $\cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \sin \alpha \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$

8. Zbadaj czy istnieje kąt spełniający równanie:

- (a) $2\sin^2 \alpha - 1 = 0$
- (b) $3\sin \alpha - 2 = 0$
- (c) $\sin \alpha = \frac{3}{4}, \cos \alpha = \frac{1}{5}$
- (d) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$
- (e) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}, \sin \alpha = \frac{3}{5}$

9. Sprawdź tożsamości trygonometryczne:

- (a) $(\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

$$(b) 1 + ctg\alpha = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$(c) \frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = \sin\alpha tg\alpha$$

$$(d) 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$(e) tg^2\alpha + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha \cos^2\alpha} - 2$$

10. Kąt α jest ostry.

$$(a) \frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25, \text{ oblicz wartość wyrażenia } \sin\alpha \cos\alpha.$$

$$(b) \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ oblicz wartość wyrażenia } \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

$$(c) \sin\alpha = \frac{1}{4}, \text{ oblicz wartość wyrażenia } 3 + 2tg^2\alpha.$$