PRZELICZANIE JEDNOSTEK MIAR

Kompleks zajęć dotyczący przeliczania jednostek miar składa się z czterech odrębnych zajęć, które są jednak nierozerwalnie połączone ze sobą tematycznie w takiej sekwencji, że wiedza wyłożona w zajęciach poprzednich jest niezbędną podstawą do przeprowadzenia następnych.
Czas trwania poszczególnych zajęć w zależności od umiejętności ucznia od 1 do 2 godzin lekcyjnych.

Zajęcia nr 1

Temat: Pojęcie potęgi i wykładniczy zapis liczb

Część I

Potęga o wykładniku naturalnym

Nauczyciel przypomina pojęcie potęgi: np.

$$2^3=2\cdot 2\cdot 2 \quad , \quad 2^2=2\cdot 2 \quad , \quad 5^2=5\cdot 5 \quad , \quad 1^4=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 \quad ,$$

itd. czyli w zapisie a^b (liczba *a* nazywa się podstawą potęgi, zaś liczba *b* – wykładnikiem potęgi), wykładnik mówi nam ile razy liczba *a* jest mnożona przez samą siebie, czyli

$$a^b=\underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{(b \;\; razy)} \quad .$$

UWAGA:
Rozumiemy teraz, że określenie „Potęga o wykładniku naturalnym” oznacza, że wykładnik *b* jest liczbą naturalną – czyli liczbą postaci: 1, 2, 3, 4, ... itd.

Uczeń wykonuje (ewentualnie z pomocą nauczyciela) zadania (sprawdzające zrozumienie i utrwalające wiedzę):

1. $3^2=?$ $\quad (=3\cdot 3)$,
2. $11^2=?$ $\quad (=11\cdot 11)$,
3. $5^3=?$ $\quad (=5\cdot 5\cdot 5)$,
4. $2^4=?$ $\quad (=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)$,
5. $10^6=?$ $\quad (=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)$,
6. $7^{100}=?$ $\quad \underbrace{(=7\cdot 7\cdot 7\cdot \ldots \cdot 7)}_{(100 \;\; razy)}$

i w odwrotną stronę:

1. $2 \cdot 2 = ?$ $\quad (= 2^2)$,
2. $1 \cdot 1 \cdot 1 = ?$ $\quad (= 1^3)$,
3. $100 \cdot 100 \cdot 100 = ?$ $\quad (= 100^3)$,
4. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = ?$ $\quad (= 5^6)$,
5. $\underbrace{21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 21}_{(258 \ razy)} = ?$ $\quad (= 21^{258})$,
6. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = ?$ $\quad \left(= \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$.

Część II
Wykładniczy zapis liczb postaci: 10, 100, 1000, 10000, ... , itd.

Przekaz nauczyciela. W zgodzie z wiedzą przedstawioną w *części I* możemy zapisać następujące przykłady

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100 \quad , \qquad 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \quad ,$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \quad , \qquad 10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$$

a następnie naprowadzamy ucznia na bardzo prostą zasadę: mianowicie, że w zapisie

$$10^n = \underbrace{100...0}_{(n \ zer)}$$

wykładnik n jest taki sam jak liczba zer następujących po jedynce.

Uczeń wykonuje zadania sprawdzające oraz utrwalające jego wiadomości:

1. $10^1 = ?$ $\quad (= 10)$,
2. $10^2 = ?$ $\quad (= 100)$,
3. $10^{10} = ?$ $\quad (= 10000000000)$,
4. $10^{121} = ?$ $\quad (= \underbrace{100...0}_{(121 \ zer)})$

i w drugą stronę:

1. $100 = ?$ $\quad (= 10^2)$,
2. $100000 = ?$ $\quad (= 10^5)$,
3. $10 = ?$ $\quad (= 10^1)$,
4. $1000000000 = ?$ $\quad (= 10^9)$,
5. $\underbrace{100...0}_{(1000 \ zer)} = ?$ $\quad (= 10^{1000})$.

Część III

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

UWAGA:
Rozumiemy teraz, że wykładnik potęgi jest liczbą postaci - 1, - 2 , -3, - 4, ... , itd.

1. Nauczyciel przypomina jak się potęguje ułamki przy wykładniku naturalnym: wzór

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

oznacza, że chcąc spotęgować ułamek oddzielnie potęgujemy licznik, oddzielnie mianownik.
Na przykład:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1^2}{2^2}=\frac{(1\cdot1)}{(2\cdot2)}=\frac{1}{4}$,

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1^3}{3^3}=\frac{(1\cdot1\cdot1)}{(3\cdot3\cdot3)}=\frac{1}{27}$,

3. $\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{2^3}{5^3}=\frac{(2\cdot2\cdot2)}{(5\cdot5\cdot5)}=\frac{8}{125}$,

4. $\left(\frac{1}{10}\right)^6=\frac{1^6}{10^6}=\frac{1}{1000000}$,

5. $\left(\frac{1}{10}\right)^{81}=\frac{1^{81}}{10^{81}}=\frac{1}{\underbrace{100...0}_{(81\ \ zer)}}$.

Uczeń aby poczuć się pewnie, może samodzielnie wykonać kilka analogicznych zadań.

2. Nauczyciel tłumaczy (najlepiej na konkretnych przykładach) zasadę potęgowania przy wykładniku całkowitym ujemnym. Przykłady:
3.

$$2^{-2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\quad,\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{1}\right)^1=\frac{2}{1}=2\quad,\qquad 1^{-2}=\left(\frac{1}{1}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{1}\right)^2=1\quad,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{1}\right)^3=\frac{9}{1}=9\quad,\qquad \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{10}{1}\right)^1=10\quad,\qquad 10^{-1}=\left(\frac{1}{10}\right)^1=\frac{1}{10}\quad.$$

Z powyższych przykładów wynika, że zasada jest bardzo prosta: podstawę potęgi przedstawiamy w postaci ułamka (jeżeli już nim nie jest) na przykład

$$4=\frac{4}{1}\quad,$$

następnie ułamek odwracamy „do góry nogami”, zaś wykładnik bierzemy już ze znakiem (+) dodatnim.

Tutaj uczeń musi (sprawa jest pojęciowo bardziej zaawansowana), najpierw z pomocą nauczyciela, a potem coraz bardziej samodzielnie wykonać większą liczbę zadań. Poniżej umieszczonych jest kilka przykładowych:

1. $3^{-3} = ?$ $\qquad \left(= \left(\frac{3}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27} \right)$,

2. $10^{-2} = ?$ $\qquad \left(= \left(\frac{10}{1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{2} = \frac{1^2}{10^2} = \frac{1}{100} \right)$,

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = ?$ $\qquad \left(= \left(\frac{2}{1}\right)^{5} = 2^5 = 32 \right)$,

4. $10^{-6} = ?$ $\qquad \left(= \left(\frac{10}{1}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^{6} = \frac{1^6}{10^6} = \frac{1}{1000000} \right)$.

Część IV
Wykładniczy zapis ułamków dziesiętnych

1. Nauczyciel może tu przypomnieć ogólną zasadę zamiany zapisu ułamków zwykłych na dziesiętne.

Jak wiemy ułamki dziesiętne to ułamki postaci:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \quad ; \qquad \frac{1}{1000} = 0{,}001 \quad ;$$

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \quad ; \qquad \underbrace{\frac{1}{10000}}_{(zapis\ \ zwykły)} = \underbrace{0{,}0001}_{(zapis\, dziesiętny)} \quad .$$

Na podstawie powyższych przykładów wyraźnie uwidacznia się zasada zamiany zapisu zwykłego na zapis dziesiętny inaczej zwany pozycyjnym. W zapisie dziesiętnym jedynka znajduje się na miejscu po przecinku w kolejności równym ilości zer w mianowniku ułamka zwykłego, czyli:

$$\underbrace{\frac{1}{100...0}}_{(n\ \ zer)} = 0, \underbrace{0}_{(1-sze)} \underbrace{0}_{(2-gie)} \ . \ \ . \ \ . \ \underbrace{1}_{\begin{pmatrix} n-te\ \ miejsce \\ po\ \ przecinku \end{pmatrix}} \quad .$$

2. Nauczyciel tłumaczy.

Zgodnie z materiałem wyłożonym w *Części III* w pkt 2 wiemy, że:

$$10^{-1}=\left(\frac{10}{1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{10}\right)^{1}=\frac{1^1}{10^1}=\frac{1}{10}=0{,}1 \quad ;$$

$$10^{-2}=\left(\frac{10}{1}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{10}\right)^{2}=\frac{1^2}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01 \quad ;$$

$$10^{-3}=\left(\frac{10}{1}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{10}\right)^{3}=\frac{1^3}{10^3}=\frac{1}{1000}=0{,}001 \quad ;$$

$$10^{-4}=\left(\frac{10}{1}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{10}\right)^{4}=\frac{1^4}{10^4}=\frac{1}{10000}=0{,}0001 \quad ;$$

... itd.

Widzimy, że zasada ogólna jest niezwykle prosta: liczba stojąca w wykładniku po minusie jest równa ilości zer w mianowniku ułamka w postaci zwykłej (lub co na jedno wychodzi – kolejnym numerem miejsca po przecinku na którym stoi jedynka w postaci dziesiętnej).

Dalej uczeń znów coraz bardziej samodzielnie wykonuje zestaw zadań, których kilka propozycji jest zamieszczonych poniżej.

1. $0{,}00001=?$ $\quad (=10^{-5})$,

2. $\frac{1}{1000000}=?$ $\quad (=10^{-6})$,

3. $10^{-10}=?$ $\quad (=0{,}0000000001)$,

4. $10^{-131}=?$ $\quad \left(=0,\ 0\ 0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ \underbrace{1}_{\left(\substack{131\ \textit{miejsce}\\ \textit{po przecinku}}\right)} = \frac{1}{\underbrace{100...0}_{(131\ \textit{zer})}}\right)$.

3. Przy okazji i na zakończenie możemy uświadomić uczniowi, jak kolosalne zalety ma zapis wykładniczy; otóż na przykład zapisując liczbę

$$10^{1892}$$

w postaci dziesiętnej musielibyśmy napisać jedynkę ze 1892 ZERAMI!

Podobnie jest z ułamkami; na przykład liczba

$$10^{-1000} \quad ,$$

która w zapisie zwykłym miałaby w mianowniku 1000 ZER! czyli

$$\left(\frac{1}{\underbrace{100...0}_{(1000\ \ ZER!)}}\right) \quad .$$

Natomiast ta sama liczba w zapisie dziesiętnym (pozycyjnym) jedynkę by miała na TYSIĘCZNYM! miejscu po przecinku, czyli

$$0,\ 0\ 0\ .\ .\ .\ \underbrace{1}_{\left(\begin{array}{c}TYSIĘCZNE!\ \ miejsce\\ po\ \ przecinku\end{array}\right)} \quad .$$

Jak zobaczymy w trakcie omawiania dalszego materiału, kiedy przejdziemy do działań arytmetycznych na bardzo małych i bardo wielkich liczbach zalet zapisu wykładniczego jest znacznie więcej!

Suplement do zajęć nr 1
Wykładniczy zapis małych i wielkich liczb

1. Wykładniczy zapis wielkich liczb.

Jak wiadomo „normalny", czyli dziesiętny zapis wielkich liczb jest często niewygodny lub wręcz niemożliwy, gdyż trzeba by używać zbyt wielkiej ilości cyfr. Aby zapisać liczbę w postaci wykładniczej korzystamy z oczywistego faktu, iż mnożąc dowolną liczbę całkowitą przez 10 dopisujemy do niej jedno zero; czyli np.

$$2\cdot 10=20 \quad , \quad 100\cdot 10=1000 \quad ;$$

mnożąc dowolną liczbę całkowitą przez $100=10^2$ dopisujemy do niej dwa zera; czyli np.

$$51\cdot 100=5100 \quad , \quad 11\cdot 100=1100 \quad ;$$

ogólnie rzecz biorąc mnożąc dowolną liczbę całkowitą przez 10^n dopisujemy do niej n zer; czyli np.

1. $11\ \underbrace{000...0}_{(453\ \ zera)}=11\cdot 10^{453}$,

2. $5\ 689\ 000\ 000=5\ 689\cdot 10^6$,

3. $469\ 000\ 000\ 000=469\cdot 10^9$,

4. $21\ 865\ 431\ \underbrace{000...0}_{(1000\ \ zer)}=21\ 865\ 431\cdot 10^{1000}$.

UWAGA:
W dalszym ciągu będziemy już zatem zawsze milcząco zakładali, że wykładniczy zapis liczby r to iloczyn

$$r = a \cdot 10^n \quad ;$$

gdzie a jest liczbą całkowitą bez zer na końcu, zaś $n \in C$ a r jest dowolną liczbą.

2. Wykładniczy zapis małych liczb.

Będziemy korzystać z następujących faktów:

1. Liczba całkowita to liczba, której część ułamkowa wynosi 0, czyli milcząco zakładamy, że w dowolnej liczbie całkowitej przecinek dziesiętny stoi na końcu liczby, zaś dalej są same zera czyli np.

   156 = 156,0 ; 1 = 1,0 ; 21896 = 21896,0 ; itd.

2. Dalej:

a) Mnożąc dowolną liczbę całkowitą przez

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}$$

zmniejszamy tę liczbę dziesięciokrotnie, czyli przesuwamy przecinek o jedno miejsce w lewo co dla przykładu możemy przedstawić:

$$156 \cdot 10^{-1} = 15{,}6 \quad , \qquad 1 \cdot 10^{-1} = 0{,}1 \quad , \qquad 21896 \cdot 10^{-1} = 2189{,}6 \quad .$$

b) Mnożąc dowolną liczbę całkowitą przez

$$\frac{1}{100} = 10^{-2}$$

zmniejszamy tę liczbę stokrotnie, czyli przesuwamy przecinek o dwa miejsca w lewo co możemy przedstawić:

$$156 \cdot 10^{-2} = 1{,}56 \quad , \qquad 1 \cdot 10^{-2} = 0{,}01 \quad , \qquad 21896 \cdot 10^{-2} = 218{,}96 \quad .$$

c) Ogólnie: mnożąc dowolną liczbę całkowitą przez 10^{-n} - przesuwamy przecinek w lewo o n miejsc, czyli na przykład:

- $2236 \cdot 10^{-4} = 0{,}2236$, *Jeśli po przesunięciu przecinek znajduje się na początku liczby to oczywiście musimy przed nim dopisać* 0, *gdyż oznacza to, że liczba zmniejszyła się o tyle, iż jej część całkowita jest równa właśnie* 0.
- $7777 \cdot 10^{-3} = 7{,}777$,
- $69854 \cdot 10^{-5} = 0{,}69854$,

- $218569 \cdot 10^{-5} = 2{,}18596$,

- $\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{(100\ \ jedynek)} \cdot 10^{-99} = 1,\underbrace{1\ .\ .\ .\ 1}_{(99\ \ jedynek)}$.

3. Kłopoty może sprawić sytuacja, w której liczba całkowita jest „krótsza" (czyli ma mniej cyfr) niż ilość miejsc o które musimy przesunąć przecinek; wyjaśnimy to na przykładach:

- $638 \cdot 10^{-8}$, *tutaj musimy przesunąć przecinek w lewo o 8 miejsc a już po* ***trzech*** *miejscach znajduje się on na początku liczby - na pozostałych* ***pięciu*** *miejscach dopisujemy wówczas zera czyli:*

$$638 \cdot 10^{-8} = 0,\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 6\ 3\ 8}_{przecinek\, o\, 8\, miejsc\, w\, lewo} ,$$

przecinek z końca liczby (638**,**) *został przesunięty w lewo o 8 miejsc;*

- $12 \cdot 10^{-10} = 0,\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2}_{(\,przecinek\ o\,10\,miejsc\,w\,lewo\,)}$,

tutaj *przecinek z końca liczby* (12**,**) *został przesunięty w lewo o10 miejsc i analogicznie:*

- $1 \cdot 10^{-5} = 0,\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 1}_{(5\,miejsc)}$,

- $131 \cdot 10^{-4} = 0,\underbrace{0\ 1\ 3\ 1}_{(4\,miejsca)}$.

4. Chcąc teraz zapisać „małą liczbę" w postaci dziesiętnej (znaczy ułamek) w innej postaci wykładniczej dokonujemy procesu niejako odwrotnego, czyli liczymy ile cyfr stoi w ułamku po przecinku i liczba tych cyfr jest wykładnikiem potęgi w interesującej nas postaci, dodajmy jeszcze raz wykładniczej. To znaczy:

1. $0,\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 8\ 1}_{(6\,cyfr)} = 81 \cdot 10^{-6}$,

2. $0,\underbrace{0\ 0\ 1}_{(3\,cyfry)} = 10^{-3}$,

3. $8\ 1\ 5\ 6,\underbrace{4\ 3\ 2\ 1}_{(4\,cyfry)} = 81564321 \cdot 10^{-4}$,

4. $0,\underbrace{0\ 0\ 0\ .\ .\ .\ 0\ 9\ 8\ 5}_{(1350\,cyfr)} = 985 \cdot 10^{-1350}$.

UWAGA:
Pisanie zer na końcu ułamka dziesiętnego jest pozbawione sensu gdyż np.

$$0{,}22 = 0{,}220 = 0{,}2200 \quad \text{i tak dalej,}$$

$$\text{bowiem} \quad \left(\frac{22}{100} = \frac{220}{1000} = \frac{2200}{10000} \right) \quad \text{i tak dalej,}$$

tak więc zakładamy, że ułamek dziesiętny zawsze kończy się liczbą różną od zera.

KONIEC zajęć nr 1