PRZELICZANIE JEDNOSTEK MIAR

Kompleks zajęć dotyczący przeliczania jednostek miar składa się z czterech odrębnych zajęć, które są jednak nierozerwalnie połączone ze sobą tematycznie w takiej sekwencji, że wiedza wyłożona w zajęciach poprzednich jest niezbędną podstawą do przeprowadzenia następnych.
Czas trwania poszczególnych zajęć w zależności od umiejętności ucznia od 1 do 2 godzin lekcyjnych.

Zajęcia nr 2

Temat: Działania arytmetyczne na potęgach liczby 10

Część 0
<u>Intro</u>

Działania arytmetyczne przy użyciu liczb w zapisie wykładniczym ze specjalnym uwzględnieniem tych będących w postaci 10^n i 10^{-n} ; $n \in \mathbb{N}$.

Innymi słowy mnożenie i dzielenie liczb będących całkowitą potęgą liczby 10 (czyli podstawa potęgi to 10, zaś wykładnik jest liczbą całkowitą).

UWAGA 1:
Przypominamy, że zbiór liczb całkowitych możemy przedstawić w postaci:

$$\mathbb{C} = \{ \underbrace{\ .\ .\ .\ }_{(do\ -\infty\ \leftarrow)} -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \underbrace{\ .\ .\ .\ }_{(\rightarrow\ do\ +\infty)} \}$$

Zatem liczby będące całkowitą potęgą 10 to liczby postaci:

(a) $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, ... itd.

(b) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$, $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$, $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$, ... itd.

(c) $10^0 = 0$, *uzasadnienie tego wyniku, który wielu uczniom wydaje się dziwny znajdziecie dalej* :).

Część I
Mnożenie liczb będących całkowitą potęgą liczby 10

Zasadniczy wzór, z którego będziemy dalej korzystać ma następującą postać:

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n} \quad , \qquad \text{gdzie} \quad m, n \in \mathbb{C} \quad . \qquad (1)$$

Uzasadnienie tego wzoru i sposoby korzystania z niego podajemy w poniższych przykładach:

Przykład 1

Zgodnie ze wzorem (1) : $10^2 \cdot 10^1 = 10^{2+1} = 10^3 = 1\ 000$;

i rzeczywiście: $10^2 \cdot 10^1 = \underbrace{100}_{2\ zera} \cdot \underbrace{10}_{1\ zero} = \underbrace{1000}_{3\ zera} = 10^3$.

Przykład 2

Ponownie w zgodzie ze wzorem (1):

$$10^5 \cdot 10^7 = 10^{5+7} = 10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000 \quad .$$

Uzasadnienie:

$$10^5 \cdot 10^7 = \underbrace{100000}_{5\ zer} \cdot \underbrace{10000000}_{7\ zer} = \underbrace{1000000000000}_{12\ zera} = 10^{12}$$

Przykład 3

Także tym razem w zgodzie ze wzorem (1) możemy zapisać:

$$10^4 \cdot 10^4 = 10^{4+4} = 10^8 \quad ;$$

bowiem:

$$10^4 \cdot 10^4 = \underbrace{10000}_{4\ zera} \cdot \underbrace{10000}_{4\ zera} = \underbrace{100000000}_{8\ zer} = 10^8 \quad .$$

Jak widzimy w przypadku kiedy $m, n \in \mathbb{N}$ (czyli są liczbami postaci 1, 2, 3, ...) wzór (1) jest po prostu odbiciem faktu, że przy mnożeniu dwóch liczb ilość zer na końcu jednej liczby i ilość zer na końcu drugiej liczby się dodają.

Zajmiemy się teraz przypadkiem, kiedy w iloczynie $10^m \cdot 10^n$ jeden z wykładników jest liczbą dodatnią a drugi ujemną.

Przykład 1

Zgodnie ze wzorem (1) : $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^{5+(-3)} = 10^{5-3} = 10^2 = 100$.

Uzasadnienie: $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 10^5 \cdot \frac{1}{10^3} = \frac{10^5}{10^3} = \frac{100\ \cancel{000}}{1\ \cancel{000}} = 100$.

Widzimy jak tutaj wzór (1) jest ilustracją faktu, że zera w liczniku i zera w mianowniku się upraszczają i w liczniku zostają **5 – 3 = 2** zera.

Przykład 2

Zgodnie ze wzorem (1) : $10^7 \cdot 10^{-1} = 10^{7-1} = 10^6$;

bo: $10^7 \cdot 10^{-1} = 10^7 \cdot \frac{1}{10} = \frac{10\ 000\ 000}{10} = 1\ 000\ 000 = 10^6$.

Przykład 3

Zgodnie ze wzorem (1) : $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{2+(-5)} = 10^{2-5} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\ 000}$;

bo: $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^2 \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{100}{100\ 000} = \frac{1}{1\ 000} = 10^{-3}$.

Tutaj mieliśmy (**dwa**) **2** zera w liczniku i (**pięć**) **5** zer w mianowniku, więc po uproszczeniu zostały (**trzy**) **3** zera w mianowniku.

Przykład 4

Zgodnie ze wzorem (1) : $10^3 \cdot 10^{-6} = 10^{3-6} = 10^{-3}$;

bo: $10^3 \cdot 10^{-6} = 10^3 \cdot \frac{1}{10^6} = \frac{1\ 000}{1\ 000\ 000} = \frac{1}{1\ 000} = 10^{-3}$.

Omówimy teraz ciekawy przypadek, kiedy wykładniki ***m*** *i* ***n*** *są liczbami przeciwnymi, czyli* ***m = 5, n = -5*** *lub* ***m = -1, n = 1*** *lub* ***m = 365, n = -365*** *itd. Wówczas zachodzi:*

- $$10^5 \cdot 10^{-5} = 10^5 \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{10^5}{10^5} = 1 \quad ,$$
- $$10^1 \cdot 10^{-1} = 10 \cdot \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1 \quad ,$$
- $$10^{365} \cdot 10^{-365} = 10^{365} \cdot \frac{1}{10^{365}} = \frac{10^{365}}{10^{365}} = 1 \quad ;$$

liczba dzielona przez samą siebie zawsze daje jedynkę **1***; ale przecież będąc w zgodzie ze wzorem* (1) *musimy napisać, że:*

- $$10^5 \cdot 10^{-5} = 10^{5-5} = 10^0 \quad ,$$
- $$10^1 \cdot 10^{-1} = 10^{1-1} = 10^0 \quad ,$$
- $$10^{365} \cdot 10^{-365} = 10^{365-365} = 10^0 \quad ;$$

i widzimy teraz (porównując te dwie grupy powyższych zapisów) dlaczego $10^0 = 1$ *. Ogólnie możemy powiedzieć, że zawsze zachodzi:*

- $$\frac{10^n}{10^n} = 10^n \cdot 10^{-n} = 10^{n-n} = 10^0 = 1$$. ☺☺, ☻☺, ☻☻, ♀♂, ♀♀, ♂♂

Część II
Dzielenie liczb będących całkowitą potęgą liczby 10

Na kilku prostych przykładach pokażemy jak przypadek dzielenia liczb będących całkowitymi potęgami dziesiątki można sprowadzić do przypadku mnożenia takich liczb.

UWAGA 2:
Pamiętamy, że dzielenie zamiast znaku (**:**) możemy zapisywać za pomocą kreski ułamkowej (zresztą ten drugi sposób jest na ogół znacznie wygodniejszy i bardziej praktyczny; czyli np.

$$1:2 = \frac{1}{2} \quad ; \qquad 4:10 = \frac{4}{10} = 0{,}4 \quad ; \qquad 1:(-1) = \frac{1}{-1} = -1 \quad ;$$

$$10:100 = \frac{1\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \quad ; \qquad 1:1000 = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \quad .$$

Przykład 1

$$10^5 : 10^3 = \frac{10^5}{10^3} = 10^5 \cdot \frac{1}{10^3} = 10^5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 10^5 \cdot 10^{-3} = 10^{5+(-3)} = 10^2$$

Przykład 2

$$10^{-2} : 10^5 = \frac{10^{-2}}{10^5} = 10^{-2} \cdot \frac{1}{10^5} = 10^{-2} \cdot 10^{-5} = 10^{(-2)+(-5)} = 10^{-7}$$

Przykład 3

$$10^7 : 10^{-3} = \frac{10^7}{10^{-3}} = 10^7 \cdot \frac{1}{10^{-3}} = 10^7 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 10^7 \cdot 10^3 = 10^{10}$$

Przykład 4

$$10^{-1} : 10^{-121} = \frac{10^{-1}}{10^{-121}} = 10^{-1} \cdot \frac{1}{10^{-121}} = 10^{-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-121} = 10^{-1} \cdot 10^{121} = 10^{120}$$

UOGÓLNIENIE JEST OCZYWISTE:

$$10^m : 10^n = 10^m \cdot 10^{-n} \quad ;$$

czyli aby zamienić dzielenie na mnożenie po prostu zamieniamy znak wykładnika w dzielniku na przeciwny!!!

Zauważmy też, że wykorzystując wzór (1) – znajdujący się na początku *części I* – możemy otrzymać gotowy wzór na dzielenie:

$$10^m : 10^n = \underbrace{10^m \cdot 10^{-n} = 10^{m-n} = 10^{m+(-n)}}_{\textit{porównaj z wzorem } (1)} \quad \text{; oczywiście} \quad \{m+(-n)=m-n\} \quad ,$$

czyli przy dzieleniu wykładniki się odejmują.

Przykład 1

$$10^5 : 10^2 = 10^{5-2} = 10^3$$

Przykład 2

$$10^{-6} : 10^{-2} = 10^{-6-(-2)} = 10^{-6+2} = 10^{-4}$$

Przykład 3

$$10^5 : 10^{-8} = 10^{5-(-8)} = 10^{5+8} = 10^{13}$$

Przykład 4

$$10^{-1} : 10^{-2} = 10^{-1-(-2)} = 10^{-1+2} = 10^1 = 10$$

Część III
Mnożenie i dzielenie liczb przez 10 w dowolnej potędze

UWAGA 2:
Będzie tutaj mowa o mnożeniu i dzieleniu dowolnej liczby przez takie, które są postaci

$$10^n \text{ , gdzie } n \in \mathbb{C} \text{ .}$$

Przy użyciu wprowadzonego do tej pory aparatu możemy już bez trudności mnożyć i dzielić dowolną liczbę rzeczywistą r przez liczby postaci 10^n , gdzie $n \in \mathbb{C}$.
Najwygodniej jest to robić doprowadzając najpierw liczbę r do postaci wykładniczej (o ile już w niej nie jest); zilustrujemy to na przykładach.

Przykład 1

$$48{,}2689 \cdot 10^{-6} = \underbrace{482689 \cdot 10^{-4}}_{48{,}2698} \cdot 10^{-6} = 482689 \cdot 10^{-10}$$

Przykład 2

$$35000000 \cdot 10^{-10} = \underbrace{35 \cdot 10^{6}}_{35000000} \cdot 10^{-10} = 35 \cdot 10^{-4}$$

Przykład 3

$$0{,}00081 \cdot 10^{7} = \underbrace{81 \cdot 10^{-5}}_{0{,}00081} \cdot 10^{7} = 81 \cdot 10^{2} = 8100$$

Jak pamiętamy dzielenie przez liczbę 10^n jest równoznaczne z mnożeniem przez liczbę 10^{-n} .

Przykład 4

$$1{,}5689 : 10^{-4} = 1{,}5689 \cdot 10^{4} = \underbrace{15689 \cdot 10^{-4}}_{1{,}5689} \cdot 10^{4} = 15689$$

Przykład 5

$$0{,}00038 : 10^{6} = \underbrace{38 \cdot 10^{-5}}_{0{,}00038} \cdot 10^{-6} = 38 \cdot 10^{-11}$$

Przykład 6

$$111{,}111 : 10^{-10} = \underbrace{111111 \cdot 10^{-3}}_{111{,}111} \cdot 10^{10} = 111111 \cdot 10^{7}$$

Przykład 7

$$0{,}000001 : 10^{-7} = \underbrace{1 \cdot 10^{-6}}_{0{,}000001} \cdot 10^{7} = 1 \cdot 10 = 10$$

Przykład 8

$$23859000000 : 10^{11} = \underbrace{23859 \cdot 10^{6}}_{23859000000} \cdot 10^{-11} = 23859 \cdot 10^{-5}$$

Przykład 9

$$2000{,}0002 : 10^{-42} = \underbrace{20000002 \cdot 10^{-4}}_{2000{,}0002} \cdot 10^{42} = 20000002 \cdot 10^{38}$$

Teraz jesteśmy już w pełni przygotowani do przeliczania jednostek miar!!!

KONIEC zajęć nr 2